Lezioni del 31 ottobre e 5 novembre 2018

Docente:Alessandra Cutri

Argomenti:sottosuccessioni, ogni successione limitata ammette una sottosuccessione convergente, successioni fondamentali e criterio di Cauchy. Definizione di limite per funzioni reali di una variabile reale, esempi, teorema ponte.

Argomenti:dimostrazione teorema ponte, applicazione a non esistenza di limiti di funzioni, unicità del limite, teoremi di confronto, limiti notevoli per funzioni, limite destro/sinistro, per eccesso/difetto, limite di funzioni composte (con dim.). Definizione di continuità

DEFINIZIONE DI SOTTOSUCCESSIONE

Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione
estraiamo da questa in modo arbitrario infiniti termini mantenendo l'ordine che avevano in a_n

$\Downarrow$

costruiamo così $\{b_n\}$

che si chiama sottosuccessione di a_n

es: $a_n = n = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

$b_n = 2^n = \{1, 2, 4, 8, 16, \dots\}$

$b_n = 2n+1 = \{1, 3, 5, 7, 9, \dots\}$

OSS: $c_n = \sqrt{n}$ non è una sottosucc. di a_n ($\sqrt{n} \notin \mathbb{N}$)

Quindi b_n è una sottosuccessione di a_n

$\Updownarrow$

$\exists\, k_n \in \mathbb{N}$ $\quad k_n \nearrow$ strettamente

t.c. $\quad b_n = a_{k_n}$

Es $\quad k_n = 2^n \quad \nearrow$ e $2^n \in \mathbb{N}$

$k_n = n! \quad \nearrow$ e $n! \in \mathbb{N}$

perché i termini in b_n hanno lo stesso ordine che avevano in a_n

A.Cutri 29/10/18

$$b_n = a_{n!} = \{1, 2, 6, 24, 120, \dots\}$$

$$b_n = \{1, 2, 24, 6, 120 \dots\}$$

non è una sottosuccessione di $a_n = n$

Proprietà

1. Sia $a_n \to \ell \in \mathbb{R}^*$

$\Updownarrow$

A.Cutri 29/10/18

$\forall k_n \nearrow$ $\{a_{k_n}\}$ è tale che $a_{k_n} \to \ell$

Quindi una successione ha limite $\ell \Leftrightarrow$ ogni sottosuccessione estratta ha lo stesso limite ℓ

$\Downarrow$

se si trovano due sottosuccessioni estratte da $\{a_n\}$ che tendono a limiti diversi

$\Rightarrow$ a_n non converge

Per esempio

$a_n = (-1)^n$

$b_n = a_{2n} = 1 \quad \forall n \rightarrow 1$ A.Cutri 29/10/18

$b_n = a_{2n+1} = -1 \quad \forall n \quad \rightarrow -1$

$\Downarrow$

a_n non ha limite

Però da $\{a_n\} = \{(-1)^n\}$ è possibile estrarre una sottosuccessione convergente (in questo caso ne abbiamo individuate due: a_{2n+1}, a_{2n})

<u>OSS:</u> $\{(-1)^n\}$ è una successione <u>LIMITATA</u>

TEOREMA: Da ogni successione limitata $\{a_n\} \subseteq \mathbb{R}$
A.Cutri 29/10/18
è possibile estrarre una sottosuccessione convergente a $\ell \in \mathbb{R}$

Dimostrazione (Conseguenza del Teorema di Bolzano - Weierstrass)

1 caso: in $\{a_n\}$ ci sono infiniti elementi tutti uguali ad un valore $a \in \mathbb{R}$ (a compare infinite volte nella successione $\{a_n\}$)
$\Rightarrow \{a, a, a, \dots a, \dots\}$
è una sottosuccessione di $\{a_n\}$ convergente ad $a \in \mathbb{R}$ (es. $(-1)^n$ contiene $a_{2n+1} = -1 \ \forall n$)

A.Cutri 29/10/18

2 caso: la successione contiene infiniti valori diversi tra loro

$\Rightarrow A := \{a_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$
(cioè è l'insieme immagine di a_n)

è un insieme limitato (a_n è limitata)

e infinito (contiene infiniti elementi)

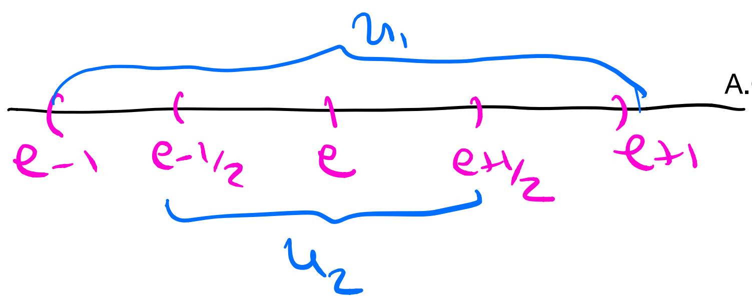
$\Downarrow$ Teorema B.W.

A ammette in $\mathbb{R}$ un punto di accumulazione $l \in \mathbb{R}$

- Costruiamo una sottosuccessione di $\{a_n\}$ tendente a l:

Perché l è punto di acc. per A
$\Rightarrow$ ogni intorno di l
contiene infiniti elementi
della successione. Scegliamo
la famiglia di intorni di l

$$U_n = \left(l - \frac{1}{n}, l + \frac{1}{n}\right)$$



$n=1 \quad \exists\, a_{k_1} \in U_1 \qquad b_1 = a_{k_1}$

$n=2 \quad \exists\, a_{k_2} \in U_2 \ (k_2 > k_1) \quad b_2 = a_{k_2}$

$k_2 > k_1$

$n=3 \quad \exists\, a_{k_3} \in U_3 \ (k_3 > k_2 > k_1) \quad b_3 = a_{k_3}$

$n \quad \exists\, k_n \in \mathbb{N} : a_{k_n} \in \left(e - \frac{1}{n}, e + \frac{1}{n}\right) \subset U_{n-1} \subset \ldots \subset U_1 \quad b_n = a_{k_n}$

$k_n > k_{n-1} > \ldots > k_3 > k_2 > k_1$

$b_n = a_{k_n} \to e$ per costruzione

$0 < |a_{k_n} - e| < 1/n$

visto che definitivamente appartiene ad ogni intorno di e

Successioni FONDAMENTALI o di CAUCHY

<u>Def:</u> $(a_n) \subset \mathbb{R}$ si dice fondamentale o di Cauchy se

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq n_\varepsilon$

si ha $|a_n - a_m| < \varepsilon$

(o, equivalentemente, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}: \ \forall n \geq n_\varepsilon \ \forall p > 0 \ (p \in \mathbb{N})$

$|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$)

Quindi le distanze tra due termini della successione tende a zero per $n \to +\infty$

<u>Oss:</u> Una successione fondamentale è limitata: Infatti se $\varepsilon = 1$
$\Rightarrow \exists n_1 \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq n_1$
$|a_n - a_m| < 1$
se $m = n_1 \rightsquigarrow |a_n - a_{n_1}| < 1 \ \forall n \geq n_1$
$\Rightarrow |a_n| < |a_{n_1}| + 1 \ \forall n \geq n_1$
$|a_n| \leq \max\{|a_1|; |a_2| \dots |a_{n_1}|, |a_{n_1}| + 1\} =: M$

A.Cutri 29/10/18

Criterio di Cauchy: Condizione necessaria e sufficiente perché $(a_n) \subseteq \mathbb{R}$ $a_n \to l \in \mathbb{R}$ è che (a_n) sia una successione fondamentale

È un criterio fondamentale perché per provare l'esistenza del limite confronto i termini della successione senza fare intervenire il candidato limite

Importantissimo nei procedimenti numerici:
se a_n sono i risultati di un processo iterativo "soluzione approssimata di un problema costruito per passi" $\Rightarrow$ se da un certo passo in poi $|a_n - a_m| <$ soglia prefissata $\rightsquigarrow$ $l \cong a_n$
Se si sa che la sol. è unica $\rightsquigarrow$ le a_n sono un'approx della soluz. l (l'unica possibile)

A.Cutri 29/10/18

DIMOSTRAZIONE (Criterio di Cauchy)

1° parte: convergente $\Rightarrow$ fondamentale
(quindi l'essere fondamentale è cond. necessaria per essere conv.)

hyp: $a_n \to \ell$ Tesi: a_n è fondam.

Infatti: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$: $|a_n - \ell| < \varepsilon/2 \quad \forall n > n_\varepsilon$

$\Downarrow$

$$|a_n - a_m| \leq |a_n - \ell + \ell - a_m| \leq |a_n - \ell| + |a_m - \ell| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$\forall n, m > n_\varepsilon$

<u>2 parte</u>: fondam. $\Rightarrow$ conv.

hyp: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$: $\forall n, m \geq n_\varepsilon$
$|a_n - a_m| < \varepsilon$

$\Rightarrow \{a_n\}$ è limitata $\underset{(BW)}{\Rightarrow}$ $\{a_n\}$ ha una sottosucc. $\{a_{k_n}\}$ conv. a $\ell \in \mathbb{R}$

A.Cutri 29/10/18

Proviamo che tutta la successione

$a_n \to \ell$

Infatti $|a_n - \ell| = |a_n - a_{k_n} + a_{k_n} - \ell|$

$\leq |a_n - a_{k_n}| + |a_{k_n} - \ell|$ $(*)$

ma $\forall \varepsilon > 0$

$\exists N_{\varepsilon_1} \in \mathbb{N} : \forall n > N_{\varepsilon_1}$ $|a_{k_n} - \ell| < \varepsilon/2$

$\exists n_{\varepsilon_2} \in \mathbb{N}$ $: \forall n, k_n > n_{\varepsilon_2}$ $|a_n - a_{k_n}| < \frac{\varepsilon}{2}$

(hyp: a_n è fondamentale e (a_{k_n}) è una sottosucc. di (a_n))

$\Rightarrow (*) < \varepsilon$ $\forall n > \max\{N_{\varepsilon_1}, n_{\varepsilon_2}\}$

LIMITI DI FUNZIONI

Sia $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x_0 \in \mathbb{R}^*$ punto di accumulazione per X

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}^*$$

$$\Updownarrow$$

$\forall$ Intorno $\mathcal{V}$ di ℓ

$\exists\ \mathcal{U}_{x_0}$ = intorno di x_0

t.c. $f(x) \in \mathcal{V}$

definitiva-mente per $x \to x_0$

$$\boxed{\forall x \in (\mathcal{U}_{x_0} \cap X) \setminus \{x_0\}}$$

OSS: ciò che accade in x_0 non interessa

(x_0 potrebbe non appartenere a X ma è punto di acc. per X)

Quindi:

1. non è richiesto che $x_0 \in \text{dom} f = X$
2. anche se $x_0 \in \text{dom} f = X$ <u>non</u> si richiede che $f(x_0) \in \mathcal{U}$ (intorno di ℓ)
3. Poiché x_0 è di accumulazione per $X = \text{dom} f$ $\Rightarrow$ $\mathcal{U}_{x_0} \cap X$ contiene infiniti elementi di X su cui testare f

<u>Es</u>: $f(x) = \dfrac{1}{x}$ $\quad X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

si può fare $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$

perché 0 è di acc. per $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (anche se poi si proverà che tale limite non esiste)

<u>Es</u>: $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \neq 0 \\ 20 & x = 0 \end{cases}$ $\Leftarrow$ NON RIVESTE ALCUN RUOLO

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0 = \lim_{x \to 0} x^2$$

A.Cutri 29/10/18

OSS:

Se $\ell \in \mathbb{R}$ ⇝ intorno U di ℓ

$$U = (\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon) \quad \forall \varepsilon > 0$$

Se $\ell = +\infty$ ⇝ intorno U di $+\infty$

$$U = (K, +\infty] \quad \forall K \in \mathbb{R}$$

Se $\ell = -\infty$ ⇝ intorno U di $-\infty$

$$U = [-\infty, a) \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

Analogamente gli intorni di $x_0 \in \mathbb{R}^*$ sono

$$U_{x_0} = (x_0-\delta, x_0+\delta) \quad \delta > 0 \text{ se } x_0 \in \mathbb{R}$$

$$U_{-\infty} = [-\infty, a) \quad a \in \mathbb{R} \text{ se } x_0 = -\infty$$

$$U_{+\infty} = (a, +\infty] \quad a \in \mathbb{R} \text{ se } x_0 = +\infty$$

Quindi $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ x_0 di acc. per X

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \qquad x_0 \in \mathbb{R},\ \ell \in \mathbb{R}$$

Se $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ t.c.

$$|f(x) - \ell| < \varepsilon \quad \forall x \in X : 0 < |x - x_0| < \delta$$

$x \neq x_0$

Es

$$\lim_{x \to 2} 3x + 4 = 10 \ ?$$

$\forall \varepsilon > 0$?$\exists$? $\delta > 0$: $0 < |x - 2| < \delta$

$$|3x + 4 - 10| < \varepsilon \quad ?$$

$$|3x - 6| < \varepsilon \iff 3|x - 2| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \delta = \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{ok}$$

funzione infinitesima per $x \to 2$

$$3x + 4 = 10 + o(1) \quad x \to 2$$

A.Cutri 29/10/18

Es: $\lim_{x\to 2} x^2 = 4$?

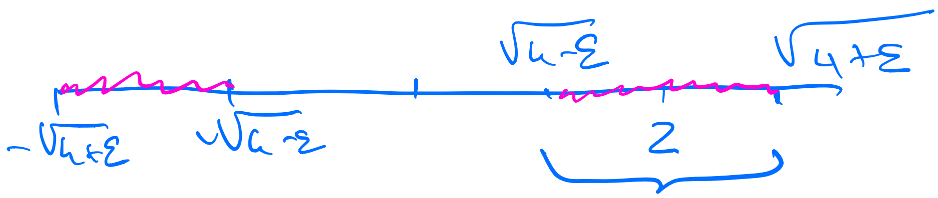
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ t.c. $0 < |x-2| < \delta$ si ha

$|x^2 - 4| < \varepsilon$?

$\Updownarrow$

$4-\varepsilon < x^2 < 4+\varepsilon \qquad (\varepsilon < 4)$

$\sqrt{4-\varepsilon} < |x| < \sqrt{4+\varepsilon}$



Intorno di 2!

$\delta = \min\{\sqrt{4+\varepsilon} - 2;\ 2 - \sqrt{4-\varepsilon}\}$
> 0

$\Rightarrow \quad x^2 = 4 + o(1) \quad \underline{x \to 2}$

$\uparrow$ fondamentale

$o(1)$: funzione infinitesima per $x \to x_0$

OSS: $x^2 = o(1)$ per $x \to 0$

(esplicitare tutti gli altri casi di limite: $x_0 = +\infty$, $x_0 = -\infty$, $\ell = +\infty$, $\ell = -\infty$)

A.Cutri 29/10/18

$$\lim_{x \to -\infty} x^2 = +\infty \ ?$$

$\forall M > 0 \quad \exists\, K \in \mathbb{R} : \quad x^2 > M \quad \forall x < K ?$

ma $\quad x^2 > M \iff |x| > \sqrt{M} <$ $x > \sqrt{M}$ / $x < -\sqrt{M}$

se $K := -\sqrt{M} \quad$ OK

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0 \ ? \quad \text{Vediamo}$$

$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, K_\varepsilon \in \mathbb{R} : \quad \left|\frac{1}{x}\right| < \varepsilon \quad$ se $x < K_\varepsilon ?$

$\Updownarrow$

$|x| > \frac{1}{\varepsilon} <$ $x > 1/\varepsilon$ / $x < -\frac{1}{\varepsilon}$

$K_\varepsilon = -\frac{1}{\varepsilon} \quad$ OK

In particolare per le successioni

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ l'unico punto di acc. in $\mathbb{R}^*$ di $\mathbb{N}$ è $+\infty$

$$\lim_{n \to +\infty} f(n) \overset{\ell}{=} \ell$$

$\Leftrightarrow$ $\forall\, \mathcal{U}$ di ℓ $\exists\, \mathcal{U}_{+\infty}$ $(n_\varepsilon, +\infty)$:

$$\underset{a_n}{\overset{\|}{f(n)}} \in \mathcal{U} \quad \forall n \in \mathcal{U}_{+\infty} \ (n > n_\varepsilon)$$

C'è un teorema che lega il limite di funzioni con quello di successioni : TEOREMA PONTE

TEOREMA PONTE : Sia $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x_0 \in \mathbb{R}^*$ punto di accumulazione per A

Allora sono equivalenti:

① $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$

② $\forall (a_n)$ $(a_n) \subset A$ $a_n \neq x_0$ definitiv.

ipotesi fondamentale

t.c. $a_n \to x_0$

$\Rightarrow f(a_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$ ← $f(a_n)$ è una successione

DIM $\ell, x_0 \in \mathbb{R}$

① ⇒ ②

Per hyp: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in A : 0 < |x - x_0| < \delta$

$\Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$

Si deve provare ②: sia dunque $(a_n) \subset A$

$a_n \neq x_0$ def t.c. $a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} x_0$

$\Rightarrow \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}:$
$0 < |a_n - x_0| < \delta \ \forall n > n_\varepsilon \Rightarrow |f(a_n) - \ell| < \varepsilon$

$a_n \neq x_0$ $(x = a_n)$

A.Cutri 29/10/18

② $\Rightarrow$ ① Per assurdo supp. che

$$f(x) \not\to \ell \quad \text{se } x \to x_0$$

$$\Updownarrow$$

$\exists \varepsilon_0 > 0$ t.c. $\forall \delta > 0$

$\exists x_\delta \in \left((x_0-\delta, x_0+\delta) \setminus \{x_0\} \right) \cap A$:

t.c. $|f(x_\delta) - \ell| > \varepsilon_0$

Allora $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ considero $\delta = \frac{1}{n}$

$\Rightarrow \exists x_n \in \left(\left(x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}\right) \setminus \{x_0\} \right) \cap A$:

$|f(x_n) - \ell| > \varepsilon_0$

ma tale x_n per costruzione verifica $0 < |x_n - x_0| < \frac{1}{n}$

$\Rightarrow x_n \to x_0$ e $x_n \neq x_0$

$\Rightarrow x_n$ è del tipo (a_n) di ②

$\Rightarrow$ C.V.D.

A.Cutri 29/10/18

Il teorema ponte può essere usato per dimostrare che un limite NON ESISTE:

Per provare che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \text{ \underline{non} esiste:}$$

è sufficiente esibire due successioni $a_n \to x_0$ $a_n \neq x_0$ def.

$b_n \to x_0$ $b_n \neq x_0$ def.

t.c. $\lim_{n \to +\infty} f(a_n) \neq \lim_{n \to +\infty} f(b_n)$

Per esempio

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \sin x \quad \underline{\text{non esiste}}}$$

Infatti

$a_n = n\pi$ $\boxed{a_n \to +\infty}$

(ovvi. $a_n \neq +\infty$)

$b_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ $\boxed{b_n \to +\infty}$

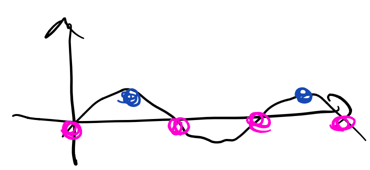
(ovviamente $b_n \neq +\infty$)

$\sin(n\pi) = 0 \ \forall n$

$\Rightarrow \boxed{\sin a_n \to 0}$

$\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 1 \ \forall n$

$\Rightarrow \boxed{\sin(b_n) \to 1}$



A.Cutri 29/10/18

Il teorema ponte può essere usato per i limiti notevoli di funzioni

p. esempio $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Consegue dal T. ponte perché abbiamo provato già che

$\forall\, b_n \to 0 \quad b_n \neq 0$ def.

$\Downarrow$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\sin(b_n)}{b_n} = 1$$

$\Rightarrow$ tesi per il teorema ponte

Quindi $\sin x = x(1 + o(1))$ $x \to 0$

(sviluppo di $\sin x$ in un intorno di zero) $= x + o(x)$ $x \to 0$

A.Cutri 29/10/18

Analogamente

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Perché abbiamo provato che

$\forall\, a_n \to 0 \quad a_n \neq 0$ def.

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1-\cos(a_n)}{a_n^2} = 1/2$$

$\Rightarrow$ Teor. per il teorema ponte

Quindi

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \text{ per } \underline{\underline{x \to 0}}$$

(sviluppo del $\cos x$ in un intorno di $x=0$)

$o(x^2)$ per $x \to 0$: funzione infinitesima di ordine superiore a x^2 per $\underline{\underline{x \to 0}}$!! cioè una $g(x)$: $g(x) \to 0$ per $x \to 0$ e $\frac{g(x)}{x^2} \to 0$ per $x \to 0$

A.Cutri 29/10/18

O anche il teorema ponte

implica che

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

cioè

$$\boxed{e^x = 1 + x + o(x) \qquad x \to 0}$$

e che

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$$

cioè vale lo sviluppo

$$\boxed{(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x) \quad \text{per } x \to 0}$$

e ancora

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e}$$

A.Cutri 5/11/2018

e che vale la catena

degli infiniti

$(\lg x)^\beta$; x^α ; a^x , x^x per $x\to+\infty$

sono infiniti in ordine

crescente per $x\to+\infty$

A.Cutri 5/11/2018

Sempre utilizzando il teorema ponte si può provare per esempio l'unicità del limite per funzioni cioè:

T1: Sia $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $x_0 \in \mathbb{R}^*$ punto di accumulazione per A. Allora, se $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}^*$

$\Rightarrow$ ℓ è unico

DIM: Per assurdo $\exists\ \ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}^*$ t.c. $\ell_1 \neq \ell_2$

e $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell_1$

$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell_2$ $\Rightarrow$ $\forall a_n \to x_0$ $a_n \neq x_0$ definitivamente t.c.

$b_n = f(a_n) \to \ell_1$

$b_n = f(a_n) \to \ell_2$

$\Rightarrow$ ma le successioni hanno limite unico $\Rightarrow$ $\ell_1 = \ell_2$

A.Cutri 5/11/2018

T2: Permanenza del segno:

Sia $\ell \in \mathbb{R}^*$, $\ell > 0 \Rightarrow \exists\, I_{x_0}$ t.c.

$\forall x \in (I_{x_0} \cap A) \setminus \{x_0\}$ si ha $f(x) > 0$

Viceversa se

$f(x) > 0$ definitivamente per $x \to x_0$

(cioè $\exists\, I_{x_0} : f(x) > 0 \ \forall x \in (I_{x_0} \cap A) \setminus \{x_0\}$

$\Downarrow$

$\ell \geq 0$

(non vale la dis. stretta $\ell > 0$

Infatti per es. $x^2 > 0$ definit. per $x \to 0$

ma $\ell = 0$

$e^{-x} > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ ma $\lim_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$)

A.Cutri 5/11/2018

T.3 (confronto). Consideriamo caso $l \in \mathbb{R}$:

Siano $f, g, h : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^*$ di accumulazione per A. Se

1. $\exists\, U_{x_0} : \forall x \in (U_{x_0} \cap A) \setminus \{x_0\}$ si ha

$$f(x) \le g(x) \le h(x)$$

e

2. $\exists\, l \in \mathbb{R} : \quad l = \lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x)$

Allora

$$\exists \lim_{x \to x_0} g(x) \underset{\uparrow}{=} l$$

Analogamente nei casi $l = +\infty$ e $l = -\infty$:

se definitivamente per $x \to x_0$ si ha $f(x) \ge g(x)$

e se $g(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} +\infty$

$\Rightarrow f(x) \to +\infty$ per $x \to x_0$

etc.

A.Cutri 5/11/2018

Valgono le usuali operazioni sui limiti e le forme indeterminate

$\infty - \infty \quad 0 \cdot \infty \quad 1^{\infty} \quad \frac{\infty}{\infty} \quad \frac{0}{0}$

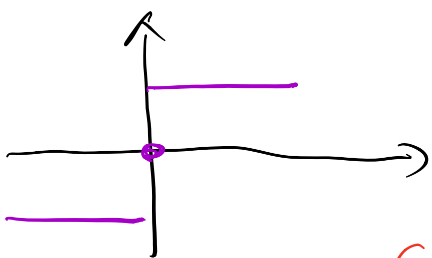
$0^0 \quad (\infty)^0$

(Confrontare libri di TESTO!!)

LIMITE DESTRO E SINISTRO PER $x \to x_0$

Osserviamo prima che

$$f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$



$$\nexists \lim_{x \to 0} \operatorname{sgn} x \quad (*)$$

(infatti si considerano
$a_n = \frac{1}{n} \to 0 \quad a_n \neq 0$
$b_n = -\frac{1}{n} \to 0 \quad b_n \neq 0$

$\operatorname{sgn}(a_n) = 1 \longrightarrow 1$
$\operatorname{sgn}(b_n) = -1 \longrightarrow -1$

$\Rightarrow$ Il limite $(*)$ non esiste

T.P.

Se però si richiede che $f(x) \in \mathcal{V}$
$\forall x \in \mathcal{U}_0^+ = (0, \delta)$ per qualche $\delta > 0$

$\Rightarrow \mathcal{V}$ intorno di 1 va bene

$\mathcal{U}_0^+ = (0, \delta)$ è un intorno DESTRO di 0

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0^+} \operatorname{sgn} x = 1$$

A.Cutri 5/11/2018

Analogamente se si richiede che

$\operatorname{sgn} x \in \mathcal{V}$ $\forall x \in U_0^- = (-\delta, 0)$ per qualche $\delta > 0$

$\Rightarrow$ $\mathcal{V}$ intorno di -1 va bene

$U_0^- = (-\delta, 0)$ è un intorno SINISTRO DI zero

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0^-} \operatorname{sgn} x = -1$$

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell$$ LIMITE DESTRO

(se x_0 è di accumulazione destro per dom f)

se $\forall \mathcal{V}$ di ℓ $\exists U_{x_0}^+ = [x_0, x_0 + \delta]$

t.c. $\forall x \in (U_{x_0}^+ \cap \operatorname{dom} f) \setminus \{x_0\}$

si ha $f(x) \in \mathcal{V}$

x_0 di acc. destro $\Leftrightarrow$ $U_{x_0}^+ \cap \operatorname{dom} f$ contiene infiniti elementi del dominio di f

A.Cutri 5/11/2018

Analogamente, se x_0 è un punto di accumulazione sinistro del dom f

si ha

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell$$

$\Leftrightarrow$ $\forall\, V$ di ℓ $\exists\, U^-_{x_0} =]x_0 - \delta, x_0] $ t.c.

$\forall x \in (U^-_{x_0} \cap \operatorname{dom} f) \setminus \{x_0\}$ si ha $f(x) \in V$

Analogamente si può definire il limite per eccesso

ℓ^+ (sostituendo a V un intorno destro di ℓ: V^+)

e limite per difetto ℓ^- (sostituendo a V, un intorno sinistro di ℓ V^-)

OSS: se limite destro e limite sinistro sono uguali $\Rightarrow$ allora esiste il $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$

A.Cutri 5/11/2018

OSS: il limite per eccesso è un limite (come quello per difetto) perché la condizione

$f(x) \in \omega^+$ è più forte di $f(x) \in \omega$

(viene specificato che f tende a ℓ da valori maggiori di ℓ / rispettiv. minori di ℓ)

mentre il limite destro/sin è una condizione più debole perché si richiede che la condizione $f(x) \in \omega$ sia verificata solo in un opportuno intorno destro di x_0 $(x_0, x_0+\delta)$ e non anche a sinistra di x_0 !! (e viceversa int. sin. e non anche dx)

OSS: se $f(x) \to 0^+$ per $x \to x_0$

$\Rightarrow \dfrac{1}{f(x)} \to +\infty$ per $x \to x_0$

se $f(x) \to 0^-$ per $x \to x_0$ $\Rightarrow$ $\dfrac{1}{f(x)} \xrightarrow[x \to x_0]{} -\infty$

A.Cutri 5/11/2018

Non esistenza di alcuni limiti:

$\lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$? NON ESISTE

(o anche $\lim_{x\to 0^+} \sin\frac{1}{x}$ o $\lim_{x\to 0^-} \sin\frac{1}{x}$)

infatti se consideriamo

$a_n = \frac{1}{n\pi}$ $\quad a_n \to 0$ (in realtà $a_n \to 0^+$)
e $a_n \neq 0$

ma $\sin(a_n) \to 0$

$a'_n = -\frac{1}{n\pi} \to 0^-$
$\sin(a'_n) \to 0$

Se invece consideriamo

$b_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$ $\quad b_n \to 0$ (in realtà $b_n \to 0^+$)
$b'_n = -b_n \to 0^-$

$\sin(b_n) = 1 \to 1$ $\quad \sin(b'_n) \to -1$

$\lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x} \nexists$

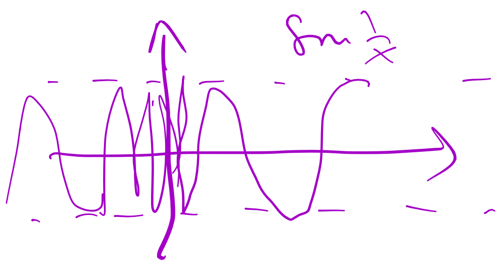
2) T. Ponte il $\lim_{x\to 0^+} \sin\frac{1}{x}$ non esiste

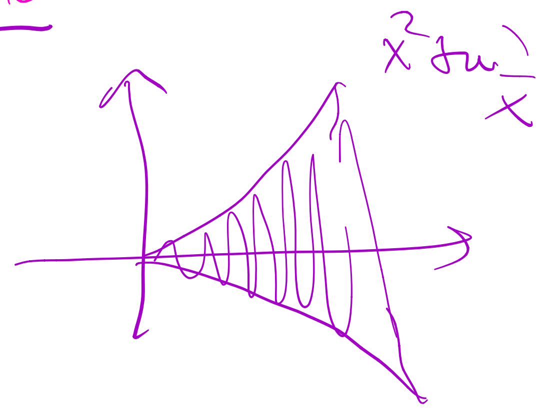
A.Cutri 5/11/2018

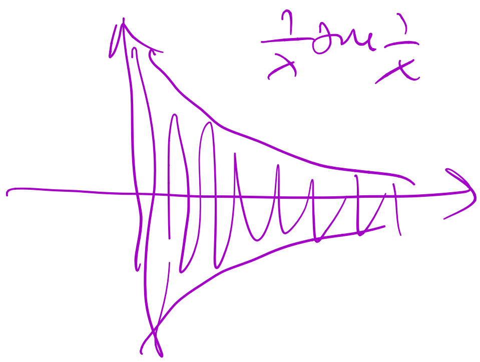
Oss:

$\lim_{x\to 0^+} |x|^\alpha \sin\frac{1}{x}$ esiste e vale zero se $\alpha > 0$ (perché $|x|^\alpha \to 0$ e $\left|\sin\frac{1}{x}\right| \le 1$)

non esiste se $\alpha \le 0$







LIMITE DI FUNZIONI COMPOSTE

Abbiamo visto che

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

Possiamo dedurre da questo che

$$\lim_{x\to 0^+}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e \quad ?$$

Vorremmo porre $y=\frac{1}{x} \to +\infty$ se $x\to 0^+$

$$\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y = e$$

lo possiamo fare?

OSS: è come considerare $g(x) := \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

$\Rightarrow g\left(\frac{1}{x}\right) = (1+x)^{1/x}$

Sappiamo che $g(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} e$

ma

se $f(x) := \frac{1}{x}$ $\quad f\to+\infty$ se $x\to 0^+$ $\overset{?}{\Rightarrow}$ $g(f)\to e$??

A.Cutrì 5/11/2018

TEOREMA DEL LIMITE DI FUNZIONI COMPOSTE

Siano $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad g: Y \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

e sia $f(X) \subseteq Y \Rightarrow g \circ f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Sia $x_0 \in \mathbb{R}^*$ punto di accumulazione per

X e supponiamo che $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$

<u>che</u> $f(x) \neq \ell$ definitivamente per $x \to x_0$ $(*)$

e che $\lim_{y \to \ell} g(y) = K$

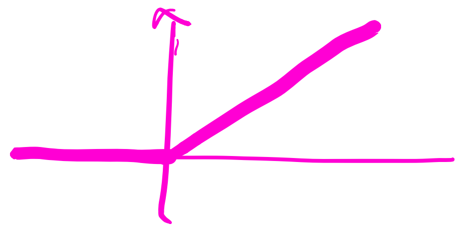
Allora $\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = K$

<u>oss</u> $(*) \Rightarrow \ell$ è punto di accumulazione per $f(X)$

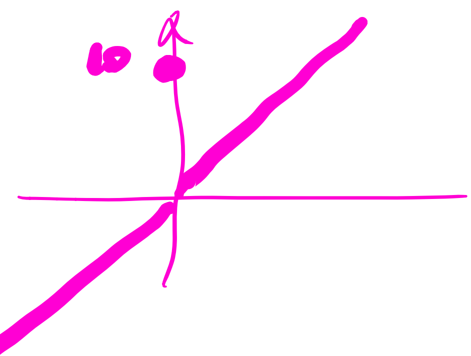
Tale condizione non può essere eliminata
(può essere sostituita da altre ma se si toglie e basta il Teorema non vale)

Controesempio che prova che la cond. $f(x) \neq \ell$ def per $x \to x_0$ non si può eliminare senza sostituirla con altre condizioni:

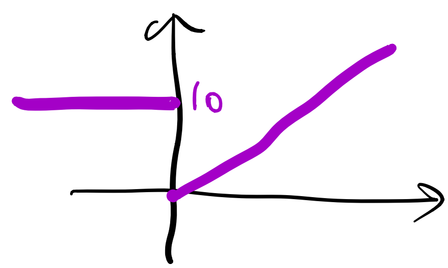
$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ x & x > 0 \end{cases}$$



$$g(x) = \begin{cases} x & x \neq 0 \\ 10 & x = 0 \end{cases}$$



$$(g \circ f)(x) = \begin{cases} 10 & x \leq 0 \\ x & x > 0 \end{cases}$$



$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} (g \circ f)(x) \quad \nexists$$

nonostante $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$ $\lim_{y \to 0} g(y) = 0$!

$\boxed{\text{la condiz. si può sostituire con } g \text{ continua in } \ell \text{ !!}}$

A.Cutri 5/11/2018

DEFINIZIONE DI CONTINUITÀ: Sia $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x_0 \in X$.

Se x_0 è un punto isolato per $f \Rightarrow f$ è continua in x_0 (senza condizioni)

Se $x_0 \in X$ è un punto di accumulazione per X

Allora f è continua in $x_0 \Leftrightarrow \exists \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

cioè

$\forall\, V$ di $f(x_0)$ $\exists\, U_{x_0} : \forall x \in U_{x_0} \cap X \Rightarrow f(x) \in V$

OSS: la cond $x \neq x_0$ non serve più perché naturalmente V (essendo intorno di $f(x_0)$) contiene $f(x_0)$!

TPonte $\Leftrightarrow \forall a_n \to x_0$ $a_n \in X$ si ha $f(a_n) \to f(x_0)$

cioè

$$\lim_{n \to +\infty} f(a_n) = f\left(\lim_{n \to +\infty} a_n\right) = f(x_0)$$

A.Cutri 5/11/2018

Dimostrazione T. del limite di funzioni composte.

Per il Teorema ponte basta provare che: $\forall \{a_n\} \subset X$: $a_n \to x_0$ e $a_n \neq x_0$ definit.

si ha $g(f(a_n)) \to K$

Ora $a_n \to x_0$ e $a_n \neq x_0$ def. e $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ quindi

(T.P.) $\lim_{n \to +\infty} f(a_n) = \ell$.

Essendo per ipotesi $f(x) \neq \ell$ def per $x \to x_0$

$\Downarrow$

$\underline{f(a_n) \neq \ell}$ def. per $n \to +\infty$

e $\underline{f(a_n) \to \ell}$ e $\Downarrow$ $g(y) \to K$ se $y \to \ell$

$g(f(a_n)) \to K$ se $n \to +\infty$

$\Downarrow$

tesi

Oss: se g è continua in ℓ non serve che $f(a_n) \neq \ell$ per provare che $g(f(a_n)) \to g(\ell) = K$