Lezione del 29 novembre 2018

Docente:Alessandra Cutri

Argomenti:Calcolo differenziale per funzioni reali di variabile reale:teorema di deL'Hospital e applicazioni, dimostrazione teorema di Peano, polinomi di Taylor con resto di Lagrange e appl. Approssimazione di e^(1/2) con pol. di MacLaurin.

Generalizzazione del T. di Lagrange

(Utile per T. di de l'Hospital e Taylor)

T. di Cauchy: Siano $f, g \in C([a,b])$ e derivabili in (a,b). Allora

$\exists c \in (a,b)$:

$$(f(b)-f(a))g'(c) = (g(b)-g(a))f'(c)$$

A.Cutri 19/11/18

& $g(a) \neq g(b)$ e $g'(c) \neq 0$

$$\Downarrow$$

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

Oss: $g(x)=x \Rightarrow$ T. di Lagrange

Dim (T. Cauchy): si applica T. di Rolle alla funzione

$h(x) := (f(b)-f(a))g(x) - (g(b)-g(a))f(x)$

$h \in C([a,b])$ h è derivabile in (a,b)

$h(a) = h(b) \Rightarrow \exists c \in (a,b) : h'(c) = 0$

$\Rightarrow (f(b)-f(a))g'(c) = (g(b)-g(a))f'(c)$ c.v.d

Teorema di de l'Hôspital

Risolve forme indeterminate del tipo $\frac{0}{0}$; $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$

(Taylor è spesso molto più utile Tranne per studiare funzioni integrali dove assume un ruolo fondamentale)

Siano $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ derivabili in (a,b) $(-\infty \le a < b \le +\infty)$

e Tali che

(1) $\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^+} g(x) = 0$ (oppure $\pm\infty$)

(2) $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a,b)$

(3) $\exists \lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R}^*$

$\Rightarrow \exists \lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L$

Oss: l'ipotesi (2) $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in (a,b)$

(1)

$g(x) \neq 0$ $\forall x \in (a,b)$ infatti,

g prolungata a zero in $x=a$ è continua in $[a,b)$ e derivabile in (a,b) $\Rightarrow$ è iniettiva

altrimenti $\exists\, x_1 \in (a,b]$: $g(x_1)=0$

allora g sarebbe cont. in $[a,x_1]$ derivabile in (a,x_1) e $g(a)=g(x_1)=0$

$\Rightarrow$ $\exists\, \bar{x} \in (a,x_1)$: $g'(\bar{x})=0$ T. Rolle

assurdo l'ipotesi (2)

Dim: siano $a \in \mathbb{R}$, $L \in \mathbb{R}$ e $f, g \to 0$ per $x \to a^+$

Prolunghiamo f, g in a ponendole $=0$

sia $\{x_n\} \subset (a,b)$ una successione tale $x_n \to a^+$ per $n \to +\infty$

$a \quad x_n$

$f, g \in C([a,x_n])$ derivabili in (a,x_n)

Per il Teorema di Cauchy

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f(x_n)-f(a)}{g(x_n)-g(a)} = \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)}$$

con $c_n \in (a, x_n)$

$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} c_n = a$

e

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)} = L$$

Poiché $x_n \to a$ è una qualsiasi successione $\to a^+$, per il Teorema Ponte

$$\Rightarrow \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L \qquad \blacksquare$$

Oss: Vale analogo risultato per $x \to b^-$

1. OSS: può darsi che

$\exists \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L$ ma non

esiste $\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Es: $\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\sin x}{x} = 1$

ma $\lim_{x\to+\infty} \frac{1+\cos x}{1} \not\exists$

Es: $\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin 1/x}{x} = 0$ ma

$\lim_{x\to 0} \frac{2x\sin 1/x - \cos 1/x}{1} \not\exists$

Attenzione: non deve far quoziente delle derivate, non derivate del quoziente

2. OSS: f e g devono essere entrambe infinitesime o entrambe infinite

$\lim_{x\to 1} \frac{1+x}{1+x^2} = 1$ ma $\lim_{x\to 1} \frac{1}{2x} = \frac{1}{2} \neq 1$

3.OSS: Applicare il procedimento non porta a niente!

Es $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} \overset{?}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{1}$

$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

hanno le stesse difficoltà: non ho molto nulla

Molto più facilmente

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{|x|\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)}{x} = 1$$

4.OSS: il teorema afferma che se $\exists \lim \frac{f'}{g'} \Rightarrow \exists \lim \frac{f}{g}$ e sono uguali

Non afferma nulla a proposito di ordini di infinitesimo e infinito (non dice che gli ordini di f e $\frac{f'}{g'}$ sono uguali)

Es: $x\to+\infty \quad f(x)=\lg x \quad g(x)=x$

$\frac{f}{g} = \frac{\lg x}{x}$ → ho senso ordine; $\frac{f'}{g'} = \frac{1}{x}$ ord 1

5. Oss: Si può applicare per calcolare coeff. angolare dell'asintoto obliquo — ma è una cond suff

Cioè se $f:(a,+\infty)\to\mathbb{R}$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\pm\infty$ + f derivabile

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}\overset{?}{=}\lim_{x\to+\infty}f'(x) \quad \text{se } \exists$$

Es: $f(x)=x+\frac{\operatorname{sen}(x^2)}{x}=x+o(1)$ per $x\to+\infty$

$y=x$ asint. obl.

ma $f'(x)=1+\frac{\cos(x^2)\,2x}{x}-\frac{1}{x^2}\operatorname{sen}(x^2)$

$=1+2\cos(x^2)+o(1)$ ← non ha limite per $x\to+\infty$

6. Oss: Dal punto di vista formale non si può applicare per calcolare $\lim a_n$ se $a_n=o(1)$, $b_n=o(1)$ entrambe infinite
(nostro b_n)

(regole Taylor) perché le successioni

NON SI DERIVANO !!

Per ovviare a questo inconveniente

si può estendere $a_n \rightsquigarrow f(x)$

in modo che $a_n = f(n)$

$b_n \rightsquigarrow g(x)$: $b_n = g(n)$

Allora

se $\exists \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n}$

↑ definitivamente

si può applicare Taylor.
le L'Hôspital

(cfr esempi nel libro)

Confrontiamo su un esempio
lo sviluppo di Taylor con t. di dell'Hôp.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x - x + x^4}{2x^4} \overset{H}{\underset{?}{=}} \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x - 1 + 4x^3}{8x^3} \quad \frac{0}{0}$$

$$\underset{(H)}{\overset{?}{=}} \lim_{x\to 0^+} \frac{-\operatorname{sen} x + 12x^2}{24x^2} \quad \frac{0}{0}$$

$$\underset{(H)}{\overset{?}{=}} \lim_{x\to 0^+} \frac{-\cos x + 24x}{48x} = \boxed{-\infty}$$

Attenzione
num. $\to 1$!!

se neglighiamo di nuovo senza verificare che non è per forma indet. $\frac{0}{0}$

$$\rightsquigarrow \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x + 24}{48} = \frac{1}{2} \;!!$$

Con taylor

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x - x + x^4}{2x^4} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\frac{x^3}{6} + o(x^3)}{2x^4}$$

$$= -\infty$$

Dim del Teorema di Peano

Enunciato: Sia $f : (a,b) \to \mathbb{R}$

derivabile n volte in $x_0 \in (a,b)$

$\Rightarrow \exists!$ pol. $T_n(x)$ grado $T_n \le n$

t.c.

$(*)$ $f(x) = T_n(x) + o\left((x-x_0)^n\right)$ $x \to x_0$

e $T_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)$ $\forall k = 0, \dots, n$

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k$$

Dobbiamo provare $(*)$ - Per induzione

$n = 0$ è vero $T_0(x) = f(x_0)$

se f è continua in $x_0 \rightsquigarrow f(x) = f(x_0 + o(1))$ vero

$n = 1$ $T_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$ è vero che

$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0)$ se f è derivabile in x_0

Applichiamo procedimento di induzione

Supponiamo vera che se $\exists f^{(n-1)}(x_0)$

$\Rightarrow f(x) = T_{n-1}(x_0) + o((x-x_0)^{n-1})$

Proviamo (*)

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-T_n(x)}{(x-x_0)^n} \overset{?}{=} \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)-T'_n(x)}{n(x-x_0)^{n-1}}$$

Ma $T'_n(x) = T^{f'}_{n-1}$ + f' ha derivate $=0$

$(f')^{(n-1)}(x_0) = f^{(n)}(x_0)$

$$\Rightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x) - T^{f'}_{n-1}}{(x-x_0)^{n-1}} = 0$$

$\Rightarrow$ Tesi

(se $g = f' \Rightarrow \exists g^{(n-1)}(x_0) \Rightarrow$ vale l'ipotesi induttiva per $g = f'$)

Teorema di Peano utile per calcolare limiti per $x \to x_0$

x_0 = centro del polinomio di Taylor

Perché approssima f con polinomi fino a meno di infinitesimi di ordine superiore $(x-x_0)^n$

quindi l'errore che commette $o((x-x_0)^n)$ tende a zero per $x \to x_0$

Se volessi approssimare

$\sqrt{e} = e^{1/2}$ con un polinomio

per esempio mclaurin di e^x calcolato in $x = 1/2$ (centro $x_0 = 0$)

$o\left(\frac{1}{2}\right)^n$ non dice nulla sull'errore di approssimazione!

Come si può fare?

→ Polinomi di Taylor

con resto di Lagrange

serve per approssimare

a x fissato $f(x)$ con $T_n(x)$

fornendo una stima dell'errore

di approssimazione

TEOREMA: Sia $f \in C^n([a,b])$ $x_0 \in (a,b)$

+ f derivabile $(n+1)$ volte

in $(a,b) \setminus \{x_0\}$

$$\Rightarrow f(x) = T_n(x) + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}}_{\sim o((x-x_0)^n)}$$

per un opportuno $\xi \in (x_0, x)$

Applichiamo questo risultato per approx

$$e^{1/2} = \underbrace{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{2}\right)^n}_{T_n(1/2)} + R_{n+1}(1/2, 0)$$

dove $R_{n+1}(1/2, 0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

$$= \frac{e^\xi}{(n+1)!}\,\frac{1}{2^{n+1}}$$

$$|R_{n+1}(1/2, 0)| \le \sup_{\xi \in (0,1/2)} \frac{e^\xi}{(n+1)!}\,\frac{1}{2^{n+1}}$$

$(e^\xi < e)$

$$\le \frac{e}{(n+1)!}\,\frac{1}{2^{n+1}}$$

Se voglio $|R_{n+1}| \le 10^{-6}$ quale n dovrei scegliere? Basta

$$\frac{e}{(n+1)!}\,\frac{1}{2^{n+1}} \le 10^{-6} \qquad e < 4 = 2^2$$

Quanti è sufficiente.

$$\frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{1}{2^{n-1}} < 10^{-6}$$

$$2^{n-1}(n+1)! > 10^{6}$$

$n=6 \rightsquigarrow 2^5 6! = 32 \cdot 720 = 23040$ NO

$n=7 \rightsquigarrow 2^6 8! = 64 \cdot 40320 =$

$= 2580480 > 10^6$

$\Rightarrow n=7$ valeva!

$$\sqrt{e} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \frac{1}{7!}\left(\frac{1}{2}\right)^7$$

$+$ (errore) $< 10^{-6}$

Oss.: Così facevano i calcolatori!