Lezione del 25 ottobre 2018

Analisi matematica I (a.a.2018/19)

Docente:Alessandra Cutrì

Limiti di successioni:Esercizi sui limiti di successioni, ordine di infinito e infinitesimo e sul corretto uso di “o piccolo” e “O grande”

Esercizi

1) $\lim_{n\to+\infty} \frac{2(n!)+3e^{n\lg(n+2)}}{n^n}$

2) $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n!}\right)^{n^n}$

3) $\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n^n}\right)^{n!}$

Soluzioni:

1. $a_n = \frac{2(n!)+3e^{n\lg(n+2)}}{n^n}$

$= \frac{2(n!)}{n^n} + 3\frac{(n+2)^n}{n^n}$

limite notevole $\to$ $\frac{2(n!)}{n^n} \to 0$

$3\frac{(n+2)^n}{n^n} = 3\left(1+\frac{2}{n}\right)^n \to 3e^2$

$\Rightarrow a_n \to 3e^2$

2. $b_n = \left(1+\frac{1}{n!}\right)^{n^n}$

$$= e^{n^n \lg\left(1+\frac{1}{n!}\right)} = e^{n^n\left(\frac{1}{n!}+o\left(\frac{1}{n!}\right)\right)}$$

$$= e^{\frac{n^n}{n!}(1+o(1))}$$

essendo $\frac{n^n}{n!} \to +\infty \Rightarrow b_n \to +\infty$

Oss: si può anche scrivere

$$b_n = \Bigg[\underbrace{\left(1+\frac{1}{n!}\right)^{n!}}_{\downarrow\, e}\Bigg]^{\frac{n^n}{n!} \to +\infty} \to +\infty$$

3. $c_n = \left(1+\frac{1}{n^n}\right)^{n!} = e^{n! \lg\left(1+\frac{1}{n^n}\right)}$

$$= e^{n!\left(\frac{1}{n^n}+o\left(\frac{1}{n^n}\right)\right)} = e^{\frac{n!}{n^n}(1+o(1))}$$

$\frac{n!}{n^n} \to 0 \quad \Rightarrow c_n \to 1$

Esercizio: Mettere in ordine di infinitesimo crescente:

$\sin\frac{1}{n}$; $\lg(\cos\frac{1}{n})$; $\frac{1}{n}\lg(n^2)$

Cioè ordinare dal più lento al più veloce

$a_n = \sin\frac{1}{n} = \frac{1}{n}(1+o(1))$ ordine di infinitesimo $\alpha = 1$

$b_n = \lg(\cos\frac{1}{n})$

$c_n = \frac{1}{n}\lg(n^2)$ ← non ha ordine di infinitesimo

però $c_n = \frac{1}{n}\cdot\left[\lg(n^2)\right]$ $\to +\infty$

Quindi c_n è più lento di a_n

cioè $a_n = o(c_n)$: per provarlo rigorosamente $\frac{a_n}{c_n}$ deve $\to 0$

ma $\frac{a_n}{c_n} = \frac{\cancel{\frac{1}{n}}(1+o(1))}{\cancel{\frac{1}{n}}\lg(n^2)} = \frac{1+o(1)}{\lg(n^2)} = o(1)$ ok

$b_n = \lg\left(\cos\frac{1}{n}\right)$

$\cos\frac{1}{n} \to 1 \Rightarrow \lg\left(\cos\frac{1}{n}\right) = \lg\left(1+\cos\left(\frac{1}{n}\right)-1\right)$

$= \cos\left(\frac{1}{n}\right)-1 + o\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)-1\right)$

$= 1 - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) - 1$

$+ o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

$= -\frac{1}{2n^2}\left(1+o(1)\right)$

$\Rightarrow b_n$ ha ordine di infinitesimo $\alpha = 2$

Perciò l'ordine crescente è

$c_n \quad a_n \quad b_n$

Oss: $\frac{1}{n}\lg n$ è un infinitesimo di ordine inferiore a $\frac{1}{n}$, a $\frac{1}{n^\beta}$ $\forall \beta \geq 1$

ma è un inf.mo di ordine superiore a $\frac{1}{n^\beta}$ $\forall \beta < 1$ infatti $\frac{n^\beta}{n}\lg n \to 0$ se $\beta < 1$

Alessandra Cutri 25/10/18

Esercizi

1. $$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}+\lg n}{\lg(\lg n)}$$

2. $$\lim_{n\to+\infty} \frac{e^n+n^4}{n^2+1} - \frac{e^n+n^2}{n^2+1}$$

3. $$\lim_{n\to+\infty} \frac{\left(n^2+\frac{n^3+7}{n^2+1}\right)^{n^2}}{(n^2+1)^{n^2}}$$

Attenzione agli "o piccoli"!!

Provare a risolverli: vedremo

Svolti la prossima lezione

1. $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}+\lg n}{\lg(\lg n)}$ $= a_n$

OSS: $\lg n = o(\sqrt{n})$

e $\lg n = o(\sqrt{n+1})$

Alunno (errore)

$a_n = \dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\lg(\lg n)} =$

$= \dfrac{1}{\underbrace{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}_{\to+\infty}\underbrace{\lg(\lg n)}_{\to+\infty}} \to 0$

$\Rightarrow a_n \to 0$

Dov'è l'errore?

$\sqrt{n+1}-\sqrt{n} \to 0 \Rightarrow$ termine dominante è $\lg n$ (che diverge!)

Quindi

$$a_n = (\lg n)(1+o(1)) / \lg(\lg(n))$$

visto che $\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\lg n} = o(1)$ $\frac{0}{\infty} = 0$

$\Rightarrow \sqrt{n+1}-\sqrt{n} = o(\lg n)$!!

$$\Rightarrow a_n = \frac{\lg n\,(1+o(1))}{\lg(\lg n)}$$

Se $c_n = \lg n \Rightarrow a_n = \dfrac{c_n}{\lg(c_n)} \longrightarrow \infty$
$\downarrow$
$+\infty$

limite notevole!

Quindi
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}+\lg n}{\lg(\lg n)} = +\infty$$

Se avremmo scritto
$$a_n = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}+o(\sqrt{n})}{\lg(\lg n)} = \frac{o(\sqrt{n})}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})\lg(\lg n)}$$
forma indeterminata

Alessandra Cutrì 25/10/18

2. $$\lim_{n\to+\infty} \underbrace{\frac{e^n+n^4}{n^2+1} - \frac{e^n+n^2}{n^2+1}}_{b_n}$$

e^n va all'∞ più velocemente di n^4 e di n^2

$\Rightarrow$

$$n^4 = o(e^n) \quad ; \quad n^2 = o(e^n)$$

$$\lim b_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{e^n+o(e^n)}{n^2+1} - \frac{e^n+o(e^n)}{n^2+1}\right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left(\cancel{\frac{e^n}{n^2+1}} - \cancel{\frac{e^n}{n^2+1}}\right) = 0$$

OPPURE

$$b_n = \frac{\cancel{e^n}+n^4-\cancel{e^n}-n^2}{n^2+1} = \frac{n^4\left(1-\frac{1}{n^2}\right)}{n^2+1}$$

$$= \frac{n^{\cancel{4}}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)}{\cancel{n^2}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}$$

$$= n^2\,\frac{(1+o(1))}{1+o(1)} \to +\infty$$

Quale procedimento è giusto?

Quale sbagliato?

Alessandra Cutri 25/10/18

0

Dove è l'errore?

L'errore è nel primo procedimento

perché è vero che $n^4 = o(e^n)$
e $n^2 = o(e^n)$

MA e^n: termine dominante si ELIDE

$\Rightarrow$ non è più termine dominante

Anche se abbiamo scritto

$e^n + o(e^n)$ per quanto abbiamo considerato

$$\frac{e^n + o(e^n)}{n^2+1} - \frac{e^n + o(e^n)}{n^2+1} = \frac{o(e^n) - o(e^n)}{n^2+1}$$

$$= \frac{o(e^n)}{n^2+1} \leftarrow e^n \cdot o(1)$$

$\infty \cdot 0$

forma indeter!!

giusto:
$\lim_{n \to +\infty} b_n = +\infty$

Alessandra Cutri 25/10/18

3. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\left(n^2+\frac{n^3+7}{n^2+1}\right)^{n^2}}{(n^2+1)^{n^2}} = c_n$

OSS

$$\frac{n^3+7}{n^2+1} = O(n) = o(n^2)$$

$$\Rightarrow \quad n^2+\frac{n^3+7}{n^2+1} = n^2+o(n^2)$$

Allora

$$c_n = \frac{(n^2+o(n^2))^{n^2}}{(n^2+1)^{n^2}}$$

$$= \left(\frac{n^2}{n^2+1}\right)^{n^2} = \frac{1}{\left(\frac{n^2+1}{n^2}\right)^{n^2}} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}}$$

$\to 1/e$

E' GIUSTO??

Attenzione: $(n^2+o(n^2))^{n^2} = (n^2(1+o(1)))^{n^2}$
$= (n^2)^{n^2} \underbrace{(1+o(1))^{n^2}}_{1^\infty}$

Alessandra Cutri 25/10/18

Come va fatto?

$$c_n = \frac{(n^2)^{n^2}}{(n^2+1)^{n^2}} \left[1 + \frac{n^3+7}{n^4+n^2}\right]^{n^2}$$

$$\frac{n^3+7}{n^4+n^2} \sim O\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$= \left(\frac{n^2}{n^2+1}\right)^{n^2} \cdot e^{n^2 \log[\,]}$$

$$= \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}} \; e^{n^2 \log\left(1+\frac{n^3+7}{n^4+n^2}\right)}$$

$$= \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}} \; e^{n^2\left[\frac{n^3+7}{n^4+n^2}(1+o(1))\right]}$$

$$n(1+o(1))$$

$$= \frac{1}{e}(1+o(1))\; e^{n(1+o(1))} \longrightarrow +\infty$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{n\to+\infty} c_n = +\infty$$

Alessandra Cutri 25/10/18

Mettere in ordine crescente i seguenti infinitesimi (es. 25 foglio 1)

① $\frac{1}{n^{1/3}} + \frac{1}{n^{1/2}}$

② $\dfrac{\frac{1}{n} + \sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{\frac{1}{n}}}$

③ $\dfrac{e^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1}{\left(\sin \frac{1}{n}\right)^{1/4}}$

④ $\frac{1}{n} \log n$

⑤ $\frac{1}{n^{\frac{101}{100}}}$

dovremmo fare venti di tutti i rapporti

Possiamo anche vedere se esistono gli ordini di infinitesimo e poi confrontare quelli che non hanno ordine usando limiti notevoli!

Alessandra Cutri 25/10/18

① $\frac{1}{n^{1/3}}+\frac{1}{n^{1/2}}=\frac{1}{n^{1/3}}(1+o(1))$ $\quad \alpha=1/3$

② $\dfrac{\frac{1}{n}+\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{\frac{1}{n}}}=\dfrac{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}{\left(\frac{1}{n}\right)^{1/2}}=\frac{1}{n^{1/2}}(2+o(1))$

$\alpha=1/2$

③ $\dfrac{e^{\frac{1}{\sqrt{n}}}-1}{\left(\operatorname{sen}\frac{1}{n}\right)^{1/4}}=\dfrac{\frac{1}{\sqrt{n}}(1+o(1))}{\left(\frac{1}{n}\right)^{1/4}(1+o(1))}=\frac{n^{1/4}}{n^{1/2}}(1+o(1))$

$=\frac{1}{n^{1/4}}(1+o(1))$

$\alpha=1/4$

④ $\frac{1}{n}\log n$: manca ordine di infinitesimo ma va a zero più lento di $\frac{1}{n}$ e più veloce di $\frac{1}{n^\beta}$ $\forall \beta<1$

⑤ $\frac{1}{n^{\frac{101}{100}}}=\frac{1}{n^{1+\frac{1}{100}}}$ $\quad \alpha=1+\frac{1}{100}$

Quindi l'ordine crescente è:

③ ① ② ④ ⑤

Determinare ordine di infinitesimo di

$$a_n = \frac{e^{-n^2} + \log\left(1+\frac{1}{n^{1/5}}\right) - \sin^3 \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^{1/3}} + \frac{2}{n^{1/7}}}$$

$$b_n = \frac{n^{1/4} + n^2 + 3}{n^7 + \sqrt{n}} + \frac{n^2+5}{2^n+3}$$

Consideriamo

$$a_n = \frac{e^{-n^2} + \frac{1}{n^{1/5}}(1+o(1)) - \frac{1}{n^3}(1+o(1))}{\frac{2}{n^{1/7}}(1+o(1))}$$

essendo $\frac{1}{n^{1/3}} = o\left(\frac{1}{n^{1/7}}\right)$

(infatti $\frac{n^{1/7}}{n^{1/3}} \to 0$)

anche $\frac{1}{n^3} = o\left(\frac{1}{n^{1/5}}\right)$ $\left(\frac{n^{1/5}}{n^3} \to 0\right)$

Anche $e^{-n^2} \to 0$ più velocemente di ogni potenza $\frac{1}{n^\alpha}$ (cfr slides successive)

$\left(e^{-n^2} = o\left(\frac{1}{n^{1/5}}\right)\right)$

Alessandra Cutri 25/10/18

Quindi

$$a_n = \frac{\frac{1}{n^{1/5}}(1+o(1))}{\frac{1}{n^{1/7}}(1+o(1))} = \frac{n^{1/7}}{n^{1/5}} = n^{-\frac{2}{35}}$$

$$= \frac{1}{n^{2/35}}$$

$$\alpha = \frac{2}{35}$$

$$b_n = \frac{n^{1/4} + n^2 + 3}{n^7 + \sqrt{n}} + \frac{n^2 + 5}{2^n + 3}$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$$\frac{\cancel{n^2}(1+o(1))}{n^5 \cancel{n^2}(1+o(1))} \qquad \sim \frac{n^2(1+o(1))}{2^n(1+o(1))}$$

$$b_n = \frac{1}{n^5}(1+o(1)) + \frac{n^2}{2^n}(1+o(1))$$

ma $\frac{n^2}{2^n} = o\left(\frac{1}{n^5}\right) \Rightarrow b_n = \frac{1}{n^5}(1+o(1))$

$\alpha = 5$

Oss:

$$e^{-n^2} = o\left(\frac{1}{n^\beta}\right) \quad \forall \beta > 0$$

infatti

$$n^\beta e^{-n^2} \longrightarrow 0$$

$$\frac{n^\beta}{e^{n^2}} = \frac{1}{e^{n^2-n}} \cdot \frac{n^\beta}{e^n}$$

perché $n^2 - n \to \infty$ → 0

limite notevole → 0 essendo $e > 1$

$\Downarrow$

e^{-n^2} tende a zero più rapidamente d'ogni potenza positiva di $\frac{1}{n}$

!! $e^{-n^2} \neq 1 - n^2 + o(n^2)$!!!

Alessandra Cutri 25/10/18