

Lezione del 24 ottobre 2018

Analisi matematica I (a.a.2018/19)

Docente: Alessandra Cutrì

Limiti di successioni: limiti notevoli, limiti di successioni trigonometriche. Ordine di infinito e infinitesimo. Esercizi

Abbiamo visto che

$$e := \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sup_{n \geq 1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

NUMERO DI NEPERO

e E' UN NUMERO IRRAZIONALE

$$2 < e < 3$$

Se $b_n \rightarrow +\infty$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{b_n}\right)^{b_n} = e$$

oss: $b_n = \frac{n}{c}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{c}{n}\right)^n = e^c$$

Spero
utile :

$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \lg f(x)}$$

$$\Rightarrow a_n^{b_n} = e^{b_n \lg a_n}$$

Certo vale $\lg e$: se è sempre
quello base quando non viene
indicate esplicitamente)

Altro limite notevole:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \lg\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$$

$\boxed{\infty \cdot 0}$

Dimostr.

$$n \lg\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \lg\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$\downarrow n \rightarrow +\infty$
 $\lg e = 1$

Quindi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\lg\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = 1$$

Se $b_n \rightarrow 0$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\lg(1 + b_n)}{b_n} = 1$$

! solo se $b_n \rightarrow 0$!!!

NOTAZIONE IMPORTANTISSIMA

def di "o" piccolo:

$$\text{Se } a_n \rightarrow 0 \Rightarrow a_n = o(1)$$

(va > successione infinitesimale)

Si dice che è "o piccolo di 1")

$$\Rightarrow \text{Se } a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow a_n = l + o(1) \quad n \rightarrow +\infty$$

(perché $a_n - l$ è infinitesimale)

ES: Abbiamo visto che

$$\frac{n^\alpha}{a^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad \forall \alpha \geq 1$$

$$\Rightarrow \frac{n^\alpha}{a^n} = o(1) \quad n \rightarrow +\infty$$

INFINITI DI ORDINE INFERIORE

Siano $a_n \rightarrow \infty$; $b_n \rightarrow \infty$ per $n \rightarrow \infty$.

Se $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ ($\Leftrightarrow$) a_n diverge più lentamente di b_n

$$\Rightarrow \frac{a_n}{b_n} = o(1) \Rightarrow a_n = o(b_n)$$

$$o(1)b_n = o(b_n)$$

a_n è un INFINITO DI ORDINE INFERIORE A b_n

Es: $n^\alpha = o(n^n)$ $\forall \alpha > 0$
 $\forall a > 1$

$$a_n = o(n!)$$

$$n! = o(n^n)$$

$$|\log n|^\beta = o(n^\alpha) \quad \forall \alpha > 0, \forall \beta > 0$$

↳
Crescente di infniti

$| \log a^n |^B$ n^α a^n $n!$ n^n

in ordine crescente

INFINITESIMI DI ORDINE SUPERIORE

$$\text{Se } \begin{matrix} a_n \rightarrow 0 \\ b_n \rightarrow 0 \end{matrix} \quad n \rightarrow +\infty$$

$$\text{se } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$$

$$a_n = o(b_n)$$

a_n è un infinitesimo di ordine
SUPERIORE a b_n

$\frac{a_n}{b_n} \rightarrow 0$ significa che a_n
va a zero più veloci-
te di b_n

DEFINIZIONE di "O" grande

$\delta = a_n \rightarrow \infty ; b_n \rightarrow \infty$ e

$$\left| \frac{a_n}{b_n} \right| \leq C \quad \text{per qualche } C > 0 \text{ definitivamente}$$

$a_n = O(b_n) : a_n \text{ è "O grande" di } b_n$

Se in particolare $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
 $\Rightarrow a_n = O(b_n)$

Analogamente se $a_n \rightarrow 0$
e $b_n \rightarrow 0$

$$\left| \frac{a_n}{b_n} \right| \leq K \quad \text{con qualche costante } K > 0 \text{ definitivamente}$$

$$\Downarrow$$
$$a_n = O(b_n)$$

Se in particolare $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow \underline{l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}}$
 $\Rightarrow a_n = O(b_n)$

Abbiamo visto che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\lg(1 + \frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} = 1$$

$\Uparrow$

$$\lg\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \quad n \rightarrow +\infty$$

Se $b_n \rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$

$$\Rightarrow \lg(1 + b_n) = b_n + o(b_n)$$

$b_n \rightarrow 0 \Rightarrow$ argomento del logaritmo

Tende a 1 (lo sviluppo vale solo in questo caso)

NON VALE QUANDO $b_n \rightarrow +\infty$

esempio $\lg(1+n) \neq n + o(n) !!$

ma $\frac{\lg(1+n)}{n} \rightarrow 0$ se $n \rightarrow +\infty$

(vedi slides del 22/10)

ALTRO LIMITE NOTEVOLE

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

$$\sqrt[n]{n} = n^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n} \lg n} \rightarrow 1$$

Per il limite notevole

$$\frac{\lg n}{n} \rightarrow 0$$

Esercizi

$$1) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2(n!) + 3e^{n \log(n+2)}}{n^n}$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n!}\right)^{n^n}$$

$$3) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n^n}\right)^{n!}$$

Altro limite notevole

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} = 1 \quad (\infty)$$

$\frac{0}{0}$

$$\Rightarrow e^{\frac{1}{n}} = 1 + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \quad n \rightarrow +\infty$$

oss: $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ se $\frac{1}{n} \rightsquigarrow b_n \rightarrow 0$

$$\forall b_n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow +\infty)$$

$$e^{b_n} = 1 + b_n + o(b_n) \quad n \rightarrow +\infty$$

Se $a \neq e$

$$a^{\frac{1}{n}} = 1 + \frac{1}{n} \log a + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

(a20)

$$\text{perché } a^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n} \log a} \quad e \quad o\left(\frac{\log a}{n}\right) = o\left(\frac{1}{n}\right)$$

ORDINE DI INFINITO:

Siano $a_n \rightarrow \pm\infty$, $b_n \rightarrow \pm\infty$
per $n \rightarrow \infty$

Se $\exists \underline{\alpha} > 0$ e $\underline{l} \in \mathbb{R}$ } of t.c.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n^{\underline{\alpha}}} = \underline{l}$$

$\Rightarrow a_n$ è un infinito di ordine α rispetto a b_n

Se $b_n = n \leadsto a_n$ è un infinito di ordine α

($b_n = n$: infinito semplice)

Quindi a_n è un infinito di ordine $\alpha > 0$ se $\exists \underline{l} \in \mathbb{R}$ } of t.c.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n^{\underline{\alpha}}} = \underline{l} \Rightarrow a_n = \underline{l} n^{\underline{\alpha}} (1 + o(1)) = O(n^{\underline{\alpha}})$$

OSS: α deve essere > 0

(si confrontano infiniti)

$l \neq 0$ altrimenti $a_n = o(n^\alpha)$

OSS: non è detto che α esista

Per esempio

• $\forall \alpha > 0 \quad \frac{2^n}{n^\alpha} \rightarrow +\infty$

(quasi 2^n è un infinito di ordine superiore ad ogni potenza di n)

• $\forall \alpha > 0 \quad \frac{\lg n}{n^\alpha} \rightarrow 0$

Quindi $\lg n$ è un infinito di ordine inferiore ad ogni potenza $n^\alpha \rightarrow$ non ha ordine di infinito,

ORDINE DI INFINITESIMO

Siano $a_n \rightarrow 0$, $b_n \rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$

Se $\exists \alpha \in \mathbb{R}^+$ ($\alpha > 0$) b.c.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n^\alpha} = c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$\Rightarrow a_n$ è un infinitesimo di ordine α rispetto a b_n

$b_n = \frac{1}{n}$: infinitesimo canonico

$\Rightarrow$ si dice che a_n è un infinitesimo di ordine α $a_n = \left(\frac{1}{n}\right)^\alpha (c + o(1))$

$$\underline{\text{Es}} \quad \lg\left(1 + \frac{1}{n}\right) \approx \frac{1}{n} (1 + o(1))$$

$$\Rightarrow \frac{\lg(1 + \frac{1}{n})}{\left(\frac{1}{n}\right)^{\textcircled{1}}} \rightarrow 1 \neq 0$$

$\left(\frac{1}{n}\right)^{\textcircled{1}} \Rightarrow \lg(1 + \frac{1}{n})$ è un infinitesimo di ordine $\alpha = \textcircled{1}$

ES: $a_n = e^{\frac{1}{n^2}} - 1 \rightarrow 0$

e vale che $e^{\frac{1}{n^2}} = 1 + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

$\Rightarrow a_n = \frac{1}{n^2} (1 + o(1)) \Rightarrow a_n \text{ è un infinitesimo di ordine } d=2$

$\Rightarrow$ Non è vero che l'ordine di un infinitesimo esiste:

• ES $a_n = \frac{1}{2^n} \rightarrow 0 \quad \text{MA}$

$\frac{a_n}{\frac{1}{n^2}} = \frac{n^2}{2^n} \rightarrow 0 \quad \forall \alpha > 0$

Quindi non esiste alcun $\alpha > 0$ t.c.

$\frac{a_n}{\left(\frac{1}{n}\right)^2} \text{ tende ad un limite}$
 $\in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad ??$

$\Rightarrow a_n = \frac{1}{2^n}$ è un infinitesimo di ordine superiore a $\frac{1}{n^2} \quad \forall \alpha > 0$

• ES: $a_n = \frac{1}{\lg^2 n} \rightarrow 0$ me

$$\frac{a_n}{\left(\frac{1}{n}\right)^\alpha} = \frac{n^\alpha}{\lg^2 n} \rightarrow \infty \quad \forall \alpha > 0$$

$\Rightarrow a_n$ è un infinitesimo di ordine inferiore ad ogni potenza $\frac{1}{n^\alpha}$

ES:

$$a_n = \frac{1}{n^{1/3}} + \frac{1}{n^{1/2}}$$

$$a_n \rightarrow 0 \quad n \rightarrow +\infty$$

he un ordine di infinitesimo?

non $\exists \alpha > 0: \frac{a_n}{\frac{1}{n^\alpha}} \rightarrow l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

o $\Leftrightarrow \exists \alpha > 0: a_n = \frac{1}{n^\alpha} (l + o(1))$

per qualche $l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$?

$$a_u = \frac{1}{n^{1/3}} + \frac{1}{n^{1/2}} = \frac{1}{n^{1/3}} \left(1 + \frac{n^{1/3}}{n^{1/2}} \right)$$

$\downarrow$
 0

$$= \frac{1}{n^{1/3}} (1 + o(1))$$

$$\Rightarrow d = 1/3$$

LIMITE NOTORIE

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^\alpha - 1}{\frac{1}{n}} = \alpha \quad \frac{0}{0}$$

$$\Rightarrow \left(1 + \frac{1}{n}\right)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

"oss: $o\left(\frac{\alpha}{n}\right) = o\left(\frac{1}{n}\right)$: in generale

$$o(c a_n) = c o(a_n) = o(a_n) \quad \text{se } c \neq 0$$

$$b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^\alpha - 1 \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow 1 + b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^\alpha$$

$$\Rightarrow \lg(1 + b_n) = \alpha \lg\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

$$\frac{b_n}{\frac{1}{n}} = \frac{b_n}{\lg(1 + b_n)} \cdot \frac{\lg(1 + b_n)}{\frac{1}{n}}$$

$$= \frac{b_n}{b_n(\text{vol})} \cdot \frac{\alpha \lg\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \rightarrow 1 \cdot \alpha = \alpha$$

$b_n \rightarrow 0!$

Sostituendo $a \frac{1}{n} \leadsto a_n \rightarrow 0$

$$\Rightarrow (1 + a_n)^2 = 1 + 2a_n + o(a_n) \quad n \rightarrow \infty$$

$$\text{oss } \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 - 1 = \frac{1}{n} (2 + o(1))$$

$\Rightarrow$ Pre ordine di infinitesimo 1

$$\begin{aligned} \sqrt{n^2 + n} - n &= \sqrt{n^2 \left(1 + \frac{1}{n}\right)} - n \\ &= n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{1/2} - n \\ &= n \left[1 + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right] - n \\ &= n + \frac{1}{2} + o(1) - n = \frac{1}{2} + o(1) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sqrt{n^2 + n} - n \rightarrow \frac{1}{2}$$

(cfr lezione scorsa)

LIMITI NOTEROLI DI FUNZIONI

TRIGONOMETRICHE

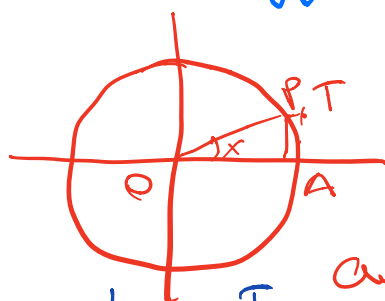
Avevamo visto che $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$

$$\left(0 < \frac{|\sin n|}{n} < \frac{1}{n} \right)$$

mentre

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1$$

DVM: $\frac{1}{n} \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{1}{n} \in (0, \pi/2)$



$$\forall x \in (0, \pi/2)$$

$$\sin x < x < \tan x$$

perché

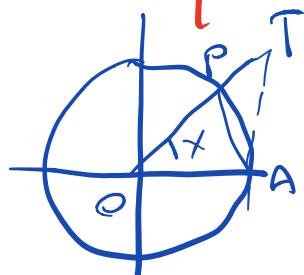
arco triangolo OAP = $\frac{\sin x}{2}$

" " " OAT = $\frac{\tan x}{2}$

" settore OAP = $\frac{x}{2}$

$$(x : 2\pi = y : \pi \Rightarrow y = \frac{x}{2})$$

area settore



Se $0 < x < \pi/2 \Rightarrow \sin x > 0$

$\Downarrow$
dividendo per $\sin x$ le dis.

$$\sin x < x < \frac{\sin x}{\cos x} \quad \text{perché}$$

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \quad \text{ma } \cos x > 0$$

$$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x$$

$$x = 1/n \Rightarrow 1 > \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} > \cos \frac{1}{n}$$

$$\text{Ma } \cos \frac{1}{n} \rightarrow 1 \text{ per } n \rightarrow \infty$$

$$\Rightarrow \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \rightarrow 1$$

$$\Rightarrow \sin \frac{1}{n} = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \text{ per } n \rightarrow \infty$$

Inoltre se $b_n \rightarrow 0$ per $n \rightarrow \infty$
 b_n è definitivamente

$$\Rightarrow \frac{\sin b_n}{b_n} \rightarrow 1 \Rightarrow \sin b_n = b_n(1 + o(1))$$

Attn: b_n potrebbe essere anche negativa definitivamente

Se $b_n < 0 \Rightarrow \frac{\sin(b_n)}{b_n} = \frac{-\sin(-b_n)}{-(-b_n)}$
 (sin x é ímpar)
 $= \frac{\sin(-b_n)}{-b_n} \Rightarrow$

Se b_n cambia segno?

$\Rightarrow$ definitivamente $b_n \in (-\pi/2, \pi/2)$
 se $b_n \in (0, \pi/2) \Rightarrow \frac{\sin b_n}{b_n} > \cos b_n$

se $b_n \in (-\pi/2, 0)$

(cos x é par)
 $\cos(-b_n) < \frac{\sin(-b_n)}{-b_n} < 1$
 $\cos(b_n) < \frac{\sin b_n}{b_n} < 1$
 $\downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow$

$\Rightarrow$ ter è vero

Quindi $\forall b_n \rightarrow 0$ $b_n \neq 0$ definitivamente.

$\Rightarrow \sin(b_n) = b_n + o(b_n)$

Quindi
 $\sin \frac{1}{n}$ è infinitesimo
 per $n \rightarrow +\infty$
 con ordine di infinitesimo
 $\alpha = 1$

Altro limite notevole

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - \cos \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2}$$

Inoltre

$$\frac{(1 - \cos \frac{1}{n})}{\frac{1}{n^2}} \cdot \frac{(1 + \cos \frac{1}{n})}{(1 + \cos \frac{1}{n})}$$

$$= \frac{1 - \cos^2(\frac{1}{n})}{\frac{1}{n^2}} \cdot \frac{1}{1 + \cos \frac{1}{n}}$$

$$1 \leftarrow \left(\frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \right)^2 \cdot \boxed{\frac{1}{\cos \frac{1}{n} + 1}} \rightarrow \frac{1}{2}$$

Quindi

$$1 - \cos \frac{1}{n} = \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\cos \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n \rightarrow +\infty}$$

Se al posto di $\frac{1}{n}$ c'è $b_n \rightarrow 0$
ma $b_n \neq o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

$\Downarrow$

$$\cos b_n = 1 - \frac{1}{2} b_n^2 + o(b_n^2)_{n \rightarrow +\infty}$$

$\Rightarrow 1 - \cos \frac{1}{n}$ è un infinitesimo
di ordine $\alpha = 2$

Esercizio: Mettere in ordine di
infinitesimo crescente?

$$\sin \frac{1}{n}; \lg\left(\cos \frac{1}{n}\right); \frac{1}{n} e^{n^2}$$

Esercizi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n} + \lg n}{\lg(\lg n)}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^n + n^4}{n^2 + 1} - \frac{e^n + n^2}{n^2 + 1}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left(n^2 + \frac{n^3 + 7}{n^2 + 1}\right)^{n^2}}{(n^2 + 1)^{n^2}}$$

Attenzione agli "0/0" !!

Provare a risolvere: veruno

Svela le prossime lezioni