

Lezione del 22 ottobre 2018

Analisi matematica I (a.a.2018/19)

Docente: Alessandra Cutrì

Limiti di successioni: limite di successioni monotone, definizione del numero di Nepero e , limiti notevoli, definizione di “ o ” piccolo e “ O ” grande, proprietà. Infiniti di ordine inferiore, infinitesimi di ordine superiore

SUCCESSIONI MONOTONE

$\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ si dice

MONOTONA CRESCENTE se

$$a_n \leq a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

MON. STRETTAMENTE CRESCENTE

se $a_n < a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

DEFINITIVAMENTE MONOTONA
CRESCENTE

se

$$a_n \leq a_{n+1}$$

$\forall n > n_0$ opportuno
(cioè se vale
definitivamente
per $n \rightarrow +\infty$)

Analogamente

MONOTONA DECRESCENTE :
 $\Uparrow$

$$a_n \geq a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

n. STRETTAMENTE DECR.

$$(\Rightarrow) \quad a_n > a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

DEFINITIVAMENTE MONOTONA

se la relazione vale

non $\forall n \in \mathbb{N}$ ma
definitivamente in n

Esercizio

$$a_n = n + \frac{10}{n} \quad n \geq 1$$

è monotona?

$$a_{n+1} = n+1 + \frac{10}{n+1}$$

$a_n \leq a_{n+1}$? vediamo

$$\cancel{n} + \frac{10}{n} \leq \cancel{n+1} + \frac{10}{n+1}$$

$\Downarrow$

$$10 \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \leq 1$$

$$\frac{\cancel{n+1} - \cancel{n}}{n(n+1)} \quad (\Leftrightarrow) \quad n(n+1) \geq 10$$

$$(\Leftrightarrow) \quad n \geq 3$$

Quindi non è monotona
crescente $\forall n \in \mathbb{N}$ ma lo è
definitivamente per $n \rightarrow \infty$

LIMITE DI SUCCESSIONI MONOTONE

Teorema: Sia $\{a_n\}$ una
successione monotona
crescente. Allora

$$\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n \quad (*)$$

(se a_n è monotona decrescente

$$\Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} a_n)$$

oss Se $\{a_n\}$ è definitivamente

crescente cioè $a_n \leq a_{n+1} \quad \forall n \geq n_1$

$$\Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \sup_{n \geq n_1} a_n$$

(analog. per succ. definitiv. decrescenti)

DM (*)

$a_n \nearrow$

$\Leftrightarrow$

$\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n$

Sia $L = \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n$

• Se $L < +\infty \Rightarrow a_n \leq L \ \forall n$
quindi $\forall \varepsilon > 0$
 $a_n < L + \varepsilon \ \forall n \in \mathbb{N}$

Del resto perché $L \in \mathbb{R} \sup$
 $\Rightarrow L - \varepsilon$ non è maggiorante

Quindi $\exists n_\varepsilon : a_{n_\varepsilon} \geq L - \varepsilon$

Perché $a_n \nearrow \Rightarrow \forall n > n_\varepsilon$

$$a_n \geq a_{n_\varepsilon} > L - \varepsilon$$

Quindi $\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} :$

$$L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon \ \forall n > n_\varepsilon$$

$\Rightarrow (*) \Leftrightarrow L < +\infty$

• Se $L = +\infty$
 $\Rightarrow \{a_n\}$ non è limitata
 superiormente
 $\Downarrow$

$\forall M > 0 \quad \exists n_M \in \mathbb{N} :$

$$a_{n_M} > M$$

Se $n > n_M$ essendo $a_n \nearrow$

$$\Rightarrow \underline{a_n \geq a_{n_M} > M} \quad \forall n > n_M$$

$\Downarrow$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n$$

$\Rightarrow (*)$

CvD

Esercizi: Calcolare

1) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n^2+1} - n$

2) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n^2+n} - n$

3) Calcolare sup e Inf di

$$A = \left\{ n + \frac{10}{n} \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$$

Svolgimento:

1) Annuncio che

$$\begin{aligned} \sqrt{n^2+1} - n &= \frac{(\sqrt{n^2+1} - n)(\sqrt{n^2+1} + n)}{\sqrt{n^2+1} + n} \\ &= \frac{n^2+1 - n^2}{n + \sqrt{n^2+1}} = \frac{1}{n + \sqrt{n^2+1}} \rightarrow +\infty \\ &\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n^2+1} - n = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2) \quad \sqrt{n^2+n} - n &= \frac{(\sqrt{n^2+n} - n)(\sqrt{n^2+n} + n)}{\sqrt{n^2+n} + n} \\
 &= \frac{n}{n + \sqrt{n^2+n}} = \frac{1}{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{n}}} \\
 &\rightarrow \boxed{\frac{1}{2}}
 \end{aligned}$$

3) Verli serise lernare:

$$a_n = n + \frac{10}{n} \quad \text{e monotone crescente per } n \geq 3$$

$$\text{e monotone decr. per } n \leq 2$$

$$\Rightarrow \sup A = +\infty \quad (a_n > n)$$

$$\begin{aligned}
 \inf A = \min A &= \min \{a_2, a_3\} \\
 &= \min \left\{ 7, \frac{19}{3} \right\} \\
 &= \frac{19}{3} = a_3
 \end{aligned}$$

Consideriamo la successione

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

è monotona crescente infatti

$$(*) a_{n+1} \geq a_n \quad \forall n \geq 1$$

Proviamo:

(*) è equivalente a

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$$
$$\text{Ma } \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}} \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

$$= \left[\frac{(n+2)n}{(n+1)^2} \right]^{n+1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

$$\begin{aligned} \text{we } (n+2)n &= (n+1+1)(n+1-1) \\ &= (n+1)^2 - 1 \end{aligned}$$

$$\left[\frac{(n+2)n}{(n+1)^2} \right]^{n+1} = \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2} \right)^{n+1}$$

$$\geq 1 - \frac{(n+1)}{(n+1)^2} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

D.B.

$$h = -\frac{1}{(n+1)^2} - 1$$

Quindi

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) \left(1 + \frac{1}{n} \right)$$

$$= \frac{\cancel{a_n}}{\cancel{n+1}} \cdot \frac{n+1}{\cancel{a_n}} = 1$$

$$\Rightarrow a_{n+1} \geq a_n \quad \forall n \geq 1$$

$$\Rightarrow \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \nearrow$$

Quindi

$$e := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sup_{n \geq 1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

NUMERO DI NEPERO

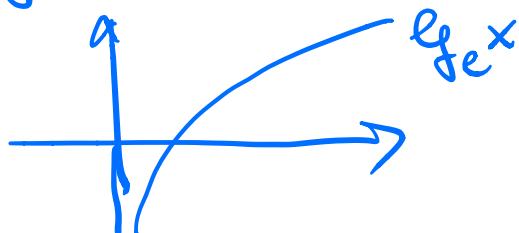
e E' UN NUMERO IRRAZIONALE

$$2 < e < 3$$

e viene usato come base per
i logaritmi

$$\log_e x \quad \text{o} \quad \ln x$$

(logaritmo naturale o NEPERIANO)



QSS: $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ è una forma
indeterminata
del tipo ∞^0

Se al posto di n sostituiamo
una qualunque successione

$$b_n \rightarrow +\infty$$
$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{b_n}\right)^{b_n} = e$$

ES: $b_n = \frac{n}{c}$ con $c > 0$
costante

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{c}{n}\right)^{\frac{n}{c}} \rightarrow e$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{c}{n}\right)^n \rightarrow e^c$$

Esercizio

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n+2}{n+1} \right)^n = e \quad \boxed{1^\infty}$$

Oss: $\frac{n+2}{n+1} \rightarrow 1$

$$\Rightarrow \frac{n+2}{n+1} = 1 + h_n \text{ con } h_n \rightarrow 0$$

come?

$$\frac{n+2}{n+1} = \frac{n+1+1}{n+1} = 1 + \left(\frac{1}{n+1} \right) = h_n$$

$$\Rightarrow \left(\frac{n+2}{n+1} \right)^n = \left(1 + \frac{1}{n+1} \right)^{n+1-1}$$

$$b_n = n+1 \quad = \left(1 + \frac{1}{n+1} \right)^{n+1} \quad \frac{1}{1 + \frac{1}{n+1}}$$

$\downarrow$ $\downarrow$

e 1

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n+2}{n+1} \right)^n = e$$

Oppure

essendo

$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \lg f(x)}$$

$$\Rightarrow a_n^{b_n} = e^{b_n \lg a_n}$$

Così vale $\lg e$: sarà sempre
quante volte quanto useremo
indichiamo esplicitamente)

$$\Rightarrow \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n = e^{n \lg\left(\frac{n+2}{n+1}\right)}$$

$$= e^{n \lg\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)}$$

$\left(\frac{n}{n+1}\right) \lg\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \rightarrow e$

$\rightarrow e$

Altro limite notevole:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$$

$\boxed{\infty \cdot 0}$

Dimostr.

$$n \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$\downarrow \quad n \rightarrow +\infty$
 $\log e = 1$

Quindi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = 1$$

Attenzione: se $n \rightarrow +\infty \Rightarrow \frac{1}{n} \rightarrow 0$

$\Rightarrow$ l'esponente del $\log$ tende a 1!
Se al posto di $\frac{1}{n} \Rightarrow \frac{b}{n} \rightarrow 0$ se
 $n \rightarrow +\infty$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log(1 + \frac{b}{n})}{\frac{b}{n}} = 1$

NOTAZIONE IMPORTANTISSIMA

def di "o" piccolo:

$$\text{Se } a_n \rightarrow 0 \Rightarrow a_n = o(1)$$

(va > successione infinitesima)

Si dice che è "o piccolo di 1")

$$\Rightarrow \text{Se } a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow a_n = l + o(1) \quad n \rightarrow +\infty$$

(perché $a_n - l$ è infinitesima)

ES: Abbiamo visto che

$$\frac{n^\alpha}{a^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad \forall \alpha \geq 1$$

$$\Rightarrow \frac{n^\alpha}{a^n} = o(1) \quad n \rightarrow +\infty$$

INFINITI DI ORDINE INFERIORE

Siano $a_n \rightarrow \infty$; $b_n \rightarrow \infty$ per $n \rightarrow \infty$.

Se $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0 \Leftrightarrow a_n$ diverge più lentamente di b_n

$$\Rightarrow \frac{a_n}{b_n} = o(1) \Rightarrow a_n = o(b_n)$$

$$o(1)b_n = o(b_n)$$

a_n è un INFINITO DI ORDINE INFERIORE A b_n

Es: $n^\alpha = o(n^u)$ $\forall \alpha > 0$
 $\forall u > 1$

$$a_n = o(n!)$$

$$n! = o(n^n)$$

$$|\log n|^\beta = o(n^\alpha) \quad \forall \alpha > 0, \forall \beta > 0$$

↳
Crescente di infniti

$| \log a^n |^B$ n^α a^n $n!$ n^n

in ordine crescente

INFINITESIMI DI ORDINE SUPERIORE

$$\text{Se } \begin{matrix} a_n \rightarrow 0 \\ b_n \rightarrow 0 \end{matrix} \quad n \rightarrow +\infty$$

$$\text{se } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$$

$$a_n = o(b_n)$$

a_n è un infinitesimo di ordine
SUPERIORE a b_n

$\frac{a_n}{b_n} \rightarrow 0$ significa che a_n
va a zero più veloci-
te di b_n

DEFINIZIONE di "O" grande

$$S \equiv a_n \rightarrow \infty ; b_n \rightarrow \infty \text{ e}$$

$$\left| \frac{a_n}{b_n} \right| \leq C \text{ per qualche } C > 0 \text{ definitivamente}$$

In particolare se $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\Rightarrow a_n = O(b_n)$$

a_n è "O" grande di b_n

Analogamente se $a_n \rightarrow 0$
e $b_n \rightarrow 0$

$$\left| \frac{a_n}{b_n} \right| \leq K \text{ con qualche costante } K > 0 \text{ definitivamente}$$

$$\Downarrow$$
$$a_n = O(b_n)$$

se in particolare $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow \underline{l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}}$

$$\Rightarrow a_n = O(b_n)$$

Abbiamo visto che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lg(1 + \frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} = 1$$

$$\frac{\lg(1 + \frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} = 1 + o(1) \quad n \rightarrow \infty$$

$$\lg(1 + \frac{1}{n}) = \frac{1}{n} + \underbrace{\frac{1}{n} o(1)}$$

$\frac{1}{n}$ per quanto
che tende a zero
 $\Rightarrow$ ve a zero più veloce
che $\frac{1}{n} \Rightarrow o(\frac{1}{n})$

$$\lg(1 + \frac{1}{n}) = \frac{1}{n} + o(\frac{1}{n}) \quad n \rightarrow \infty$$

Oppure

$$\lg(1 + \frac{1}{n}) = O(\frac{1}{n}) \quad n \rightarrow \infty$$

$$\underline{\text{oss}}: \text{in } \lg(1 + \frac{1}{n}) = \frac{1}{n} + o(\frac{1}{n})$$

$$\frac{1}{n} \rightsquigarrow b_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$\text{cioè } \forall b_n \rightarrow 0$$

$$\lg(1 + b_n) = b_n + o(b_n)$$

oss: se $b_n \rightarrow 0$ l'argomento
del $\lg$ tende a 1 se $n \rightarrow \infty$!

$$!! \lg(1+n) \neq n + o(n) !!$$

perché $n \not\rightarrow 0$ se $n \rightarrow \infty$!!

$$\begin{aligned} \text{ma } \lg(1+n) &= \lg(n(1+\frac{1}{n})) \\ &= \lg n + \lg(1+\frac{1}{n}) \\ &= \lg n + \frac{1}{n} + o(\frac{1}{n}) \\ &= \lg n + o(1) \quad n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Downarrow \\ \frac{\lg(1+n)}{n} &= \frac{\lg(n) + o(1)}{n} \\ &= \frac{\lg(n)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \\ &= o(1)!! \end{aligned}$$

non tenete a 1 come dovrebbe
se fosse vero e' approx
 $\lg(1+n) = n + o(n)$

$$!! \Rightarrow \lg(1+n) \neq n + o(n)!!$$

$n \rightarrow \infty$

Esempio $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{3}{n^2+n^4}\right)^n$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{n \lg\left(1 + \frac{3}{n^2+n^4}\right)} = (*)$$

we $h_n = \frac{3}{n^2+n^4} \rightarrow 0 \quad n \rightarrow +\infty$

$$(*) = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{n \frac{3}{n^2+n^4} (1+o(1))} = 1$$

Oss: Per cui $\lg(1+h_n) \approx h_n(1+u)$

vale quando $h_n \rightarrow 0$ cioè

quando $1+h_n \rightarrow 1$

se abbiamo

$\lg(a_n)$

e $a_n \rightarrow 1$ se $n \rightarrow \infty$

$\Rightarrow a_1 = 1+h_n$ con $h_n \rightarrow 0$

$\Rightarrow \lg(a_n) = \lg(1+h_n) \approx h_n(1+u)$

!! SOLO IN QUESTO CASO !!

ALTRE LIMITI NOTEVOLI

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

$$\sqrt[n]{n} = n^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n} \lg n} \rightarrow 1$$

Per il limite notevole

$$\frac{\lg n}{n} \rightarrow 0$$

$$\underline{\text{Es:}} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\lg n}{n}\right)^n$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} e^{n \lg \left(1 + \frac{\lg n}{n}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{n \cdot \frac{\lg n}{n} (1 + o(1))} = +\infty$$

$$\text{ma } h_n = \frac{\lg n}{n} \rightarrow 0$$

Esercizi

$$1) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2(n!) + 3e^{n \log(n+2)}}{n^n}$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n!}\right)^{n^n}$$

$$3) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n^n}\right)^{n!}$$

Altro limite notevole

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} = 1 \quad (**)$$

$\frac{0}{0}$
infatti $e^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{e} \rightarrow 1$

$$\Rightarrow a_n := e^{\frac{1}{n}} - 1 \rightarrow 0$$

se consideriamo $\log_e e^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}$

Però

$$(**) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{\log(1+a_n)} = (**)$$

(Essendo $a_{n+1} = e^{\frac{1}{n+1}} \Rightarrow \log(1+a_n) = \frac{1}{n}$)

$$(**) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{a_n(1+o(1))} = 1$$

$$e^{\frac{1}{n}} - 1 = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \Rightarrow e^{\frac{1}{n}} = 1 + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

oss: $\frac{1}{n} \rightarrow 0!!!$

vale che :

$$\forall b_n \rightarrow 0 \quad (se n \rightarrow +\infty)$$

$$e^{b_n} = 1 + b_n + o(b_n)$$

Se a te vale un' "ovale" ⁴

analogo per $a^{1/n}$?

$$a^{1/n} = e^{\frac{1}{n} \log a} = 1 + \frac{1}{n} \log a + o\left(\frac{\log a}{n}\right)$$

$$b_n = \frac{\log a}{n} \rightarrow 0$$

$$a''\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^{1/n} - 1}{\frac{\log a}{n}} = 1$$