Lezioni del 22 e 28 novembre 2018

Docente:Alessandra Cutri

Argomenti:Calcolo differenziale per funzioni reali di variabile reale: derivate successive, polinomio di Taylor:definizione, esempi(polinomi di McLaurin di e^x,e^(x^2), di e^(2x+3), sin(x),cos(x), (1+x)^\alpha, pol.di Taylor di 1/(1+x) centrato in 1); enunciato del teorema di Peano e applicazione dello sviluppo di Taylor al calcolo di limiti, di ordini di infinitesimo di funzioni. Natura dei punti critici studiando segno delle derivate successive nel punto stesso.

Argomenti:pol. di MacLaurin di 1/(1-x), 1/(1+x), 1/(1+x^2), Relazione tra pol.di Taylor di f e di f' e appl. al calcolo dei pol. di McLaurin di arctan(x) e log(1+x). Funzioni convesse/concave e punti di flesso

DERIVATE DI ORDINE SUCCESSIVO

Sia $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ derivabile $\forall x\in(a,b)$ ⤳ è definita la funzione $f':(a,b)\to\mathbb{R}$. Se f' è derivabile in x_0

$\Rightarrow \exists$ finito $f''(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{(x-x_0)}$

(oss: se f' è derivabile in $x_0 \Rightarrow f'$ è continua in x_0)

Se f' è derivabile $\forall x_0\in(a,b)$ ⤳ si definisce una nuova funzione

$f'':(a,b)\to\mathbb{R}$

Andando avanti

Se f è $(n-1)$ volte derivabile in (a,b) ed in $x_0\in(a,b)$ $\exists$ finito

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(x_0)}{x-x_0}=f^{(n)}(x_0)$$ DERIVATA n-ma in x_0

A.Cutri 22/11/18

⤳ f è derivabile n volte in x_0

OSS se $\exists\, f^{(n)}(x_0) \Rightarrow f^{(n-1)}$ è continua in x_0

NOTAZIONE $f \in C^n(a,b)$

$\Leftrightarrow$ f è derivabile n-volte in (a,b)

e $f^{(n)}(x)$ è continua in (a,b)

OSS: il dominio di f può essere

invece che un intervallo (a,b)

un unione di intervalli

$\rightsquigarrow$ i concetti si possono ripetere in modo analogo

A.Cutri 22/11/18

FORMULA DI TAYLOR

~ Approssimazione di f mediante polinomi

Sia $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ $\quad x_0\in(a,b)$

OSS1: Se f è continua in x_0

$$\Rightarrow f(x)=\underbrace{f(x_0)}_{\uparrow}+o(1) \qquad x\to x_0$$

costante ~ polinomio di grado zero

OSS2: Se f è derivabile in x_0

$$\Rightarrow f(x)=\underbrace{f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)}+o(x-x_0) \qquad x\to x_0$$

$T_1(x)$: polinomio di grado ≤ 1 che approx. f a meno di $o(x-x_0)$

$T_1(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$
verifica

$T_1(x_0)=f(x_0) \qquad T_1'(x_0)=f'(x_0) \quad (*)$

grado $T_1(x)\le 1$ A.Cutri 22/11/18

T_1 è l'unico pol. di gr ≤ 1 che verifica $(*)$

Infatti se $P_1(x) = a_0 + a_1(x - x_0)$
verifica $(*)$

$\Rightarrow \quad P_1(x_0) = a_0 \quad = f(x_0) \Rightarrow a_0 = f(x_0)$

$\quad P_1'(x_0) = a_1 \quad = f'(x_0) \Rightarrow a_1 = f'(x_0)$

$\Rightarrow \quad P_1(x) = T_1(x)$

$T_1(x)$ è la retta tangente al grafico di f in $(x_0, f(x_0))$ che esiste se f è der. in x_0

$$f(x) = T_1(x) + \underset{x \to x_0}{o(x - x_0)}$$

ES: $f(x) = e^x \quad x_0 = 0$

$e^x = 1 + x + o(x) \rightsquigarrow T_1(x) = 1 + x$

$T_1(x)$ ha un contatto di ordine 1 con $f(x)$ (cioè verifica $(*)$)

OSS: se $f'(x_0) = 0 \Rightarrow T_1(x)$ ha grado zero

Se f è n volte derivabile in x_0

$\Downarrow$

$\exists !$ polinomio di grado $\leq n$

$T_n(x)$ t.c.

$T_n(x_0) = f(x_0)$; $T_n'(x_0) = f'(x_0)$;

$T_n''(x_0) = f''(x_0)$ ... $T_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0)$

$$T_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots + a_n(x-x_0)^n$$

Come sono i coefficienti

$a_0, a_1, \dots a_n$? Troviamoli

$T_n(x_0) = f(x_0) \Rightarrow a_0 = f(x_0)$

$T_n'(x_0) = f'(x_0) \Rightarrow a_1 = f'(x_0)$

$(T_n'(x) = a_1 + a_2 2(x-x_0) + \dots + n a_n (x-x_0)^{n-1}$

$T_n'(x_0) = a_1)$

$$T_n''(x) = 2a_2 + 3\cdot 2(x-x_0)a_3 + \dots n(n-1)a_n(x-x_0)^{n-2}$$

$\Downarrow$

$T_n''(x_0) = 2a_2 \Rightarrow a_2 = \frac{f''(x_0)}{2}$

$T_n'''(x_0) = 6a_3 = 3!a_3 \Rightarrow a_3 = \frac{f'''(x_0)}{3!}$

$\vdots$

$T_n^{(n)}(x_0) = n!a_n \Rightarrow a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$

Quindi

$$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

Se $0! = 1$ $\quad f^{(0)}(x_0) = f(x_0)$

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

(Per poter scrivere $T_n(x)$ è necessario e suff. che f sia derivabile n-volte in x_0)

Se x_0 (centro) $= 0$

$\Rightarrow$ Pol. di McLaurin

Es: $x_0 = 0$ $\quad f(x) = e^x \Rightarrow f^{(n)}(x) = e^x$ $\forall n$

$\Rightarrow f^{(n)}(0) = 1$ $\forall n$

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k$$ (pol. di McLaurin di e^x)

Teorema di PEANO: Sia $f:(a,b)\to\mathbb{R}$
$x_0\in(a,b)$, f derivabile n-volte in x_0

$$\Rightarrow T_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

è l'UNICO POLINOMIO di grado $\le n$

t.c. $f(x)=T_n(x)+o\left((x-x_0)^n\right)$ $x\to x_0$

ed è l'unico polinomio che ha un
contatto di ordine n con f in x_0

cioè $f^{(k)}(x_0)=T_n^{(k)}(x_0)$ $\forall k=0,1,\dots n$

DIMOSTRAZIONE POSTICIPATA
ALLE PROSSIME LEZIONI (si usa
regola di de L'Hospital)

Se $x_0=0$ ⇝ Polinomio di
Mac Laurin

Attenzione: Perché $T_n(x)$ è l'unico
pol. di grado $\le n$ t.c.
$f(x)=T_n(x)+o((x-x_0)^n)$
se trovo (in qualunque modo) un
tale pol. $\Rightarrow$ è il pol. di Taylor T_n

A.Cutri 22/11/18

Es: $x_0 = 0$

$f(x) = e^{x^2}$

Prima abbiamo calcolato pol. di McLaurin di e^y

$$e^y = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} y^k + o(y^n) \quad y \to 0$$

$$= 1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3!} + \dots + \frac{y^n}{n!} + o(y^n)$$

Perché $x^2 \to 0$ se $x \to 0$

$$y = x^2 \rightsquigarrow e^{x^2} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^{2k} + o(x^{2n})$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^{2k} = T_{2n}(x) \text{ di } e^{x^2}$$

centrato in $x_0 = 0$

Per esempio il $T_6(x)$ di e^{x^2} è

$$T_6(x) = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!}$$

perché

$$e^{x^2} = \underbrace{1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!}}_{T_6(x)} + o(x^6) \quad x \to 0$$

A.Cutri 22/11/18

Es: Calcolare il pol di McLaurin di e^{2x+3} di ordine 4

dobbiamo trovare $T_4(x)$ t.c.

$$e^{2x+3} = T_4(x) + o(x^4) \quad x \to 0$$

OSS: $$e^{2x+3} \neq 1 + 2x+3 + \frac{(2x+3)^2}{2} + \frac{(2x+3)^3}{3!} + \frac{(2x+3)^4}{4!} + o(x^4)$$

Perché $2x+3 \not\to 0$ se $x \to 0$

ma $2x+3 \to 3$!!

Però scriviamo

$$e^{2x+3} = e^3 e^{2x} \qquad 2x \to 0 \text{ se } x \to 0$$

$$\Rightarrow e^{2x+3} = e^3 \left(1 + 2x + \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^4}{4!} + o(x^4)\right)$$

A.Cutri 22/11/18

$$T_4(x) = e^3 + 2e^3 x + 2e^3 x^2 + \frac{4}{3} e^3 x^3 + \frac{\cancel{16}^{\,2}}{\cancel{24}_{\,3}} e^3 x^4$$

Es: Calcolare pol. di Taylor
di ordine 3 centrato in $x_0=1$
per
$f(x)=\frac{1}{1+x}$

Vediamo con la definizione

$f(1)=\frac{1}{2}$

$f'(x)=-\frac{1}{(1+x)^2} \Rightarrow f'(1)=-\frac{1}{4}$

$f''(x)=\frac{2}{(1+x)^3} \Rightarrow f''(1)=\frac{1}{4}$

$f'''(x)=\frac{-6}{(1+x)^4} \Rightarrow f^{(3)}(1)=-\frac{6}{16}=-\frac{3}{8}$

$$\Rightarrow \boxed{T_3(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}(x-1)+\frac{1}{8}(x-1)^2-\frac{3}{8\cdot 3!}(x-1)^3}$$

$$\frac{1}{1+x}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}(x-1)+\frac{1}{8}(x-1)^2-\frac{1}{16}(x-1)^3+o\left((x-1)^3\right) \quad x\to 1$$

A.Cutri 22/11/18

Es: Polinomio di McLaurin di

$\boxed{f(x) = \operatorname{sen} x}$

$f'(x) = \cos x \quad f''(x) = -\operatorname{sen} x \quad f'''(x) = -\cos x$

$f^{(IV)}(x) = \operatorname{sen} x = f(x) \quad f^{(V)}(x) = f'(x) \ \ldots$

$x_0 = 0 \rightsquigarrow f(0) = 0 = f''(0) = f^{(IV)}(0)$

$= \ldots = f^{(2k)}(0)$

$f'(x_0) = 1 \quad f^{(3)}(0) = -1 \quad f^{(5)}(0) = 1$

$f^{(7)}(0) = -1 \quad \ldots$

$\Downarrow$

$f^{(2k)}(0) = 0 \qquad f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k$

$$\boxed{T_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}}$$

$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} + \boxed{o(x^{2n+1})} \quad x \to 0$

A.Cutri 22/11/18

perché il termine successivo

$\rightsquigarrow \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+3)!} x^{2n+3} \rightsquigarrow$ è in realtà $o(x^{2n+2})$ $x \to 0$

$\boxed{T_{2n+1}(x) = T_{2n+2}(x)}$

$T_1(x) = x = T_2(x)$

$\operatorname{sen} x = x + o(x^2)$ $\quad (f''(0) = 0)$

$T_2(x)$ ha ordine 2 ma grado 1

$T_3(x) = T_4(x) = x - \frac{x^3}{6}$

$T_5(x) = T_6(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!}$

$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6)$ $\quad x \to 0$

$\uparrow$ Termine che si trascura ha ordine 7 $\leadsto o(x^6)$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x - x + x^4}{2x^4} = \frac{0}{0}$$

con il limite notevole $\operatorname{sen} x = x + o(x)$ ma si ottiene:

$$\frac{o(x) + x^4}{2x^4} = \frac{o(x)}{2x^4} \quad (x^4 = o(x))$$

indet.

A.Cutri 22/11/18

$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4) \leadsto \dfrac{-\frac{x^3}{6} + o(x^4) + x^4}{2x^4} = \dfrac{-\frac{x^3}{6} + o(x^3)}{2x^4} \to -\infty$

Polinomio di McLaurin di

$f(x) = \cos x$

$f(0) = 1$

$f'(x) = -\operatorname{sen} x \rightsquigarrow f'(0) = 0$

$f''(x) = -\cos x \rightsquigarrow f''(0) = -1$

$f'''(x) = \operatorname{sen} x \rightarrow f^{(3)}(0) = 0$

$f^{(IV)}(x) = \cos x = f(x) \quad f^{(IV)}(0) = 1$

$f^{(2k+1)}(0) = 0 \qquad f^{(2k)}(0) = (-1)^k$

$T_0(x) = 1 = T_1(x)$

$T_2(x) = 1 - \frac{x^2}{2} = T_3(x)$

$$\cos x = \underbrace{1 - \frac{x^2}{2}}_{T_3(x)} + o(x^3)$$

$T_4(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} = T_5(x)$

$$\cos x = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}}_{T_{2n+1}(x)} + o(x^{2n+1})$$

A.Cutri 22/11/18

OSS: I limiti notevoli $\leadsto$ approx

con alcuni polinomi di MacLaurin

tipo T_1 o T_2

Applicazione per determinare per esempio l'ordine di infinitesimo di una funzione per $x \to x_0$

si può usare lo sviluppo di Taylor di f CENTRATO IN x_0

ES: ordine di infinitesimo per $x \to 0^+$ di

1) $$(\operatorname{sen} x)^2 - x^2 = \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^2 - x^2$$

$$= x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4) - x^2$$

$$= -\frac{x^4}{3}(1+o(1)) \underset{x\to 0}{\Rightarrow} \alpha = 4$$

OSS

$$(\operatorname{sen} x)^2 - x^2 = (x + o(x))^2 - x^2 =$$

$$= x^2 + o(x^2) - x^2 = o(x^2) \quad x \to 0$$

non si ottiene nulla!!

2) $\cos(2\sqrt{x}) - e^{-2x} \qquad \to 0 \quad x \to 0$

$$\cancel{1} - \cancel{\frac{(2\sqrt{x})^2}{2}} + \frac{(2\sqrt{x})^4}{4!} + o(x^{5/2})$$

$$- \left[\cancel{1} - \cancel{2x} + \frac{(-2x)^2}{2} + o(x^2) \right] =$$

$$= \frac{\overset{2}{\cancel{16}} x^2}{\cancel{24}\, 3} - 2x^2 + o(x^2) = -\frac{4}{3} x^2 + o(x^2) \quad x \to 0$$

$$\alpha = 2$$

OSS: $o(x^{5/2}) \underset{\text{è}}{=} o(x^2)$ perché $\frac{x^{5/2} o(1)}{x^2} \underset{x \to 0}{\to} 0$

A.Cutri 22/11/18

Polinomio di Maclaurin di

$(1+x)^\alpha$

$f(0)=1 \qquad f'(x)=\alpha(1+x)^{\alpha-1} \Rightarrow f'(0)=\alpha$

$f''(x)=\alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2} \rightarrow f''(0)=\alpha(\alpha-1)$

$f'''(x)=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(1+x)^{\alpha-3} \rightarrow f^{(3)}(0)=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)$

$f^{(n)}(0)=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)$

$$\Rightarrow T_n(x)=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3$$

$$+\dots+\underbrace{\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}}_{\binom{\alpha}{n}}x^n$$

oss

se $\alpha\in\mathbb{N}$, $\alpha\geq n$ $\longrightarrow$ $\binom{\alpha}{n}$ coeff binomiale

$$\binom{\alpha}{n}=\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$$

$T_n(x)$ è lo sviluppo di $(1+x)^\alpha$ $\forall\alpha\in\mathbb{R}$

A.Cutri 22/11/18

Se $\alpha = 1/2$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}(-1/2)}{2}x^2 + \frac{\overbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}^{n \text{ fattori}}}{n!}x^n + o(x^n)$$

ES

$$T_2(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2$$

$$\sqrt{1+x} = T_2(x) + o(x^2)$$

ES: Calcolare

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x e^x + x^2 \cos x}{x^3} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{x} - \frac{x^3}{6} + o(x^4) - x\left[\cancel{1} + \cancel{x} + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right] + x^2\left(\cancel{1} - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right)}{x^3}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\left(-\frac{1}{6} - \frac{1}{2}\right)x^3(1 + o(1))}{x^3} = -2/3$$

A.Cutri 22/11/18

NATURA DEI PUNTI CRITICI

(analizzando segno di $f^{(n)}(x_0)$ $n>1$)

Sia $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ $x_0\in(a,b)$

punto critico di f (cioè $f'(x_0)=0$)

Se $f''(x_0)\neq 0$ possiamo determinare la natura del punto critico mediante sign$(f''(x_0))$?

<u>OSS</u>: $f(x)=f(x_0)+f'(x_0)+\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2+o((x-x_0)^2)$ $x\to x_0$

$f'(x_0)=0$ $\Downarrow$

$$f(x)-f(x_0)=(x-x_0)^2\left[\frac{f''(x_0)}{2}+o(1)\right]$$

$\Downarrow$

$$\text{sign}(f(x)-f(x_0))=\text{sign}\left[f''(x_0)+o(1)\right]$$

Se $\underline{f''(x_0)>0}$ $\Rightarrow\exists\, U_{x_0}:\ f''(x_0)+o(1)>0$ in U_{x_0}

$\Rightarrow f(x)>f(x_0)$ $\forall x\in U_{x_0}$ $\to x_0$ punto di <u>MIN REL</u>

Se $f''(x_0)<0$

$\Rightarrow \exists\, U_{x_0}: \; f''(x_0)+o(1)<0 \quad \forall x\in U_{x_0}$

$\Rightarrow f(x)<f(x_0) \quad \forall x\in U_{x_0}$

punto di

$\Rightarrow x_0$ MAX RELATIVO

Se $f''(x_0)=0$ e $f^{(3)}(x_0)\neq 0$

$$f(x)-f(x_0)=(x-x_0)^3\left[f^{(3)}(x_0)+o(1)\right]$$

f non ha né max né min in x_0

perché $f(x)-f(x_0)$ cambia segno attraversando x_0 perché $(x-x_0)^3$ cambia segno attraversando x_0 e $(f^{(3)}(x_0)+o(1))$ ha lo stesso segno di $f^{(3)}(x_0)$ in un intorno di x_0

Si può andare avanti se $f'(x_0)=f''(x_0)=f^{(3)}(x_0)=0$ in modo analogo

Che relazione c'è tra polinomio di Taylor di f e di f' ?

$$T_{n-1}[f'] = T_n'[f]$$

Cioè il polinomio di Taylor

T_{n-1} relativo a f' coincide con la derivata del polinomio T_n relativo a f

Infatti se x_0 è il centro

$$T_n[f](x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

Se lo deriviamo

$$T_n'[f](x) = f'(x_0) + f''(x_0)(x-x_0) + \dots + \frac{n}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^{n-1}$$

$$\frac{n}{n!} = \frac{1}{(n-1)!}$$

A.Cutri 26/11/18

$$= T_{n-1}[f'](x)$$

OSS: Perché $(f \pm g)^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0) \pm g^{(n)}(x_0)$
e $(\alpha f^{(n)})(x_0) = \alpha f^{(n)}(x_0)$ ⟹

$$T_n[\alpha f + \beta g] = \alpha T_n[f] + \beta T_n[g]$$

ES: $(\operatorname{sen} x)' = \cos x$

$T_{n-1}[\cos x]$ lo ottengo derivando $T_n[\operatorname{sen} x]$

(in realtà in quel caso

$T_{2n}[\cos x] = T'_{2n+1}[\operatorname{sen} x]$)

Calcoliamo il pol di Mclaurin

di $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$

OSS: si può fare direttamente calcolando

Tutte le derivate in $x_0=0$ di $f(x)$

o notando che $f(x) = (1-x)^{-1}$

oppure ricordando che

$$1+x+x^2+\dots+x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x} - \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

Somma progressione geometrica

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+x^3+\dots+x^n + \underbrace{\frac{x^{n+1}}{1-x}}_{o(x^n)\ x\to 0}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+\dots+x^n+o(x^n) \quad x\to 0$$

unicità di $T_n(x)$ $\Downarrow$

$$T_n(x) = 1+x+x^2+\dots+x^n = \sum_{k=0}^{n} x^k$$

OSS: sostituendo a $x \rightsquigarrow -x$ $\left(\begin{smallmatrix}-x \to 0 \text{ se} \\ x \to 0\end{smallmatrix}\right)$

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = 1 + (-x) + (-x)^2 + \dots + (-x)^n + o(x^n)$$

$$\Rightarrow T_n\left[\frac{1}{1+x}\right] = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k$$

OSS: Sostituendo a $x \rightsquigarrow x^2$ $\left(\begin{smallmatrix}x^2 \to 0 \\ \text{se } x \to 0\end{smallmatrix}\right)$

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots + (-1)^n x^{2n} + o(x^{2n})$$

$$\Downarrow$$

$$T_{2n}\left[\frac{1}{1+x^2}\right] = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k}$$

se $f(x) = \operatorname{arctg} x$ $\qquad x_0 = 0 \qquad \underline{f(0) = 0}$

$$\left(f'(x) = \frac{1}{1+x^2}\right)$$

Quindi se $T_n(x)$ è il pol. di McLaurin di $f(x) = \operatorname{arctg} x$

A.Cutri 26/11/18

$$T_n = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_n x^n$$

$$T'_n = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots + n a_n x^{n-1}$$

$\Rightarrow \quad T'_n =$ pol di Mac Laurin di $\frac{1}{1+x^2}$

$\Downarrow$

$T'_n = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots + n a_n x^{n-1}$

$= 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 + \dots + (-1)^n x^{2n}$

Per il principio di identità dei polinomi: 2 pol. coincidono se hanno lo stesso grado e se i coefficienti dei termini di uguale grado sono uguali

$\Downarrow$

$a_1 = 1 \quad , a_2 = 0 \quad 3a_3 = -1 \ ; a_4 = 0 \ ;$

$5a_5 = +1 \quad$ etc. $\quad (a_{2n} = 0)$

$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$

$+ \frac{(-1)^n}{(2n+1)} x^{2n+1}$

$+ o(x^{2n+\cancel{1}\,2}) \quad o(x^{2n+2})$

A.Cutri 26/11/18

$T_{2n+1}[\operatorname{arctg} x] = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} = T_{2n+2}$

OSS: se f è dispari f' è pari

se f è pari $\Rightarrow f'$ è dispari

se f è dispari $f^{(2k)}$ è dispari

$\Rightarrow f^{(2k)}(0)=0 \rightsquigarrow$ nel pol di McLaurin mancano potenze pari di x

se f è pari $\Rightarrow f^{(2k+1)}$ è dispari

$\Rightarrow f^{(2k+1)}(0)=0$

$\rightarrow$ nel pol di MacLaurin mancano le potenze dispari di x

A.Cutri 26/11/18

Polinomio di Mc Laurin di

$\lg(1+x)$

Oss $\quad (\lg(1+x))' = \dfrac{1}{1+x}$

e conosciamo

$$T_n\left[\frac{1}{1+x}\right] = \sum_{k=0} (-1)^k x^k$$

$$= 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots + (-1)^n x^n$$

$$\Downarrow$$

$$T'_{n+1}[\lg(1+x)] = T_n\left[\frac{1}{1+x}\right]$$

$$= 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + \dots + (-1)^n x^n$$

Se

$$T_{n+1}[\lg(1+x)](x) = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_{n+1} x^{n+1}$$

$f(0) = 0$

$$\Rightarrow T'_{n+1}[\lg(1+x)] = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots + (n+1) a_{n+1} x^n$$

$$\Rightarrow \quad a_1 = 1 \qquad 2a_2 = -1 \qquad 3a_3 = 1$$

$$(n+1)\,a_{n+1} = (-1)^n$$

$$\Rightarrow a_{n+1} = \frac{(-1)^n}{n+1} \quad \rightsquigarrow a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

$$\Downarrow$$

$$\lg(1+x) = \underbrace{x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n}_{T_n(x)} + o(x^n)$$

Calcolare MacLaurin di ordine 6 di

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/2}$$

e di $\quad \arcsin x$

(oss $\quad (\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$)

Calcolare T_4 $x_0=0$ di $\lg(\cos x)$

per $x \to x_0 = 0 \Rightarrow \cos x \to 1$

$\Rightarrow \lg(\cos x) = \lg(1 + (\cos x - 1))$

$$= (\cos x - 1) - \frac{1}{2}(\cos x - 1)^2 + o((\cos x - 1)^2)$$

ma $\cos x - 1 = -\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$

$\Rightarrow o((\cos x - 1)^2) = o(x^4)$ quindi nello sviluppo del $\lg(1+y)$ basta fermarsi a y^2

ove $\cos x - 1 = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o(x^5)$

$$\Rightarrow \lg(\cos x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right)^2 + o(x^4)$$

$$= -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{2}\frac{x^4}{4} + o(x^4)$$

$$= \underbrace{-\frac{1}{2}x^2 + \left(\frac{1}{24} - \frac{1}{8}\right)x^4}_{T_4(x)} + o(x^4)$$

Quindi per l'unicità del $T_4(x) \Rightarrow$

$T_4(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4$

A.Cutri 26/11/18

Funzioni convesse e concave

Sia $I = (a,b)$ un intervallo

$-\infty \leq a < b \leq +\infty$ [(a b) può essere anche illimitato]

$f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice CONVESSA in I

se $\forall x_0, x_1 \in I$ $x_0 \neq x_1$, il segmento di estremi $(x_0, f(x_0))$; $(x_1, f(x_1))$

(cioè $f_t = (1-t) f(x_0) + t f(x_1)$ $t \in [0,1]$)

sta tutto sopra il grafico di $f\big|_{(x_0,x_1)}$

(cioè $f(t x_1 + (1-t) x_0)$) $t \in [0,1]$

$f(x_t)$ se $x_t = t x_1 + (1-t) x_0$ $t \in [0,1]$ descrive il segmento x_0, x_1

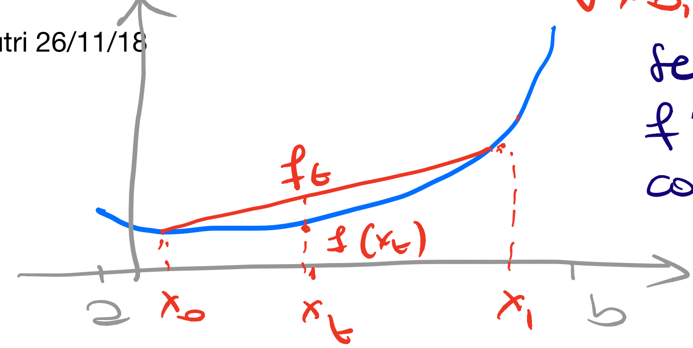
cioè

$$\underbrace{f(t x_1 + (1-t) x_0)}_{f(x_t)} \leq \overbrace{t f(x_1) + (1-t) f(x_0)}^{f_t}$$

$\forall t \in [0,1]$

$\forall x_0, x_1 \in (a,b)$

A.Cutri 26/11/18

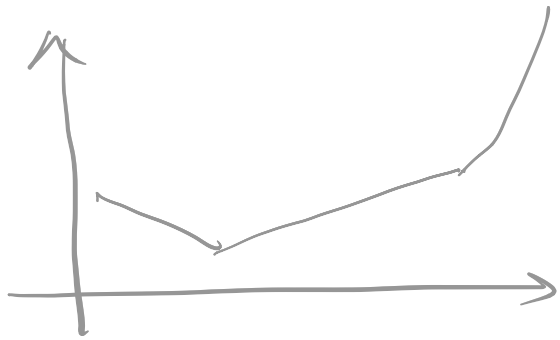


se vale $<$ $\forall t \in (0,1)$ f strettamente convessa

$\Rightarrow$ grafico non ha tratti rettilinei

f è concava $\Leftrightarrow$ $-f$ è convessa

strett. concava $\Leftrightarrow$ $-f$ è strett. convessa



f è convessa ma non strettamente convessa

Quindi f è convessa $\Leftrightarrow$ $\forall x, y \in I, \forall t \in (0,1)$

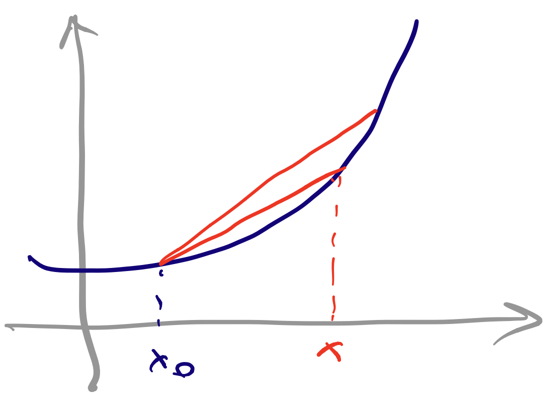
$$f(tx+(1-t)y) \leq t f(x) + (1-t) f(y)$$

<u>OSS</u>: se f è convessa, e $x_0 \in I$ fissato

$$x \mapsto P(x, x_0) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = P(x)$$

$x \neq x_0$ visto che x_0 è fissato

$\Rightarrow P(x) \nearrow$ in $I \setminus \{x_0\}$



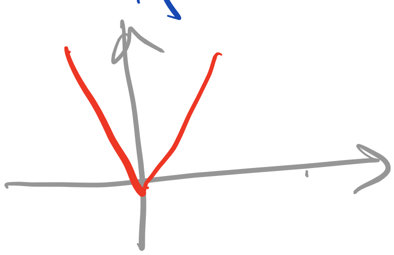
A.Cutri 26/11/18

Teorema: $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ convessa in (a,b)
Allora
1) f è continua in (a,b)
2) $\forall x\in(a,b)$ $\exists$ finiti $f'_+(x)$, $f'_-(x)$

3) $f'_+(x)\geq f'_-(x)$
4) f'_+ e f'_- sono funzioni crescenti in (a,b)

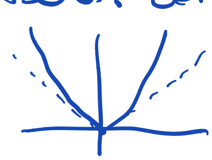
Teorema 2: $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ convessa.
Se f è derivabile in (a,b)
$\Rightarrow$ f' è crescente in (a,b)
(vale anche viceversa $f'\nearrow \Rightarrow f$ convessa)

Oss: Non è detto che le funzioni convesse in (a,b) siano derivabili in (a,b): Es: $f(x)=|x|$ è CONVESSA:
$$|tx+(1-t)y|\leq t|x|+(1-t)|y| \quad \forall t\in[0,1]$$
$$\forall x,y\in\mathbb{R}$$
ma f non è derivabile in $x_0=0$



non è strettamente convessa

Oss: $f(x)=|x|+x^2$ è strett. convessa
$\nexists f'(0)$
$x_0=0$ punto angoloso



A.Cutri 26/11/18

Vale una relazione importante

$f : (a,b) \to \mathbb{R}$

f derivabile in $x_0 \in (a,b)$

Allora

f è convessa in (a,b)

$$\Updownarrow$$

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad \forall x \in (a,b),\ x \neq x_0$$

$(>)$ se f è strett. convessa

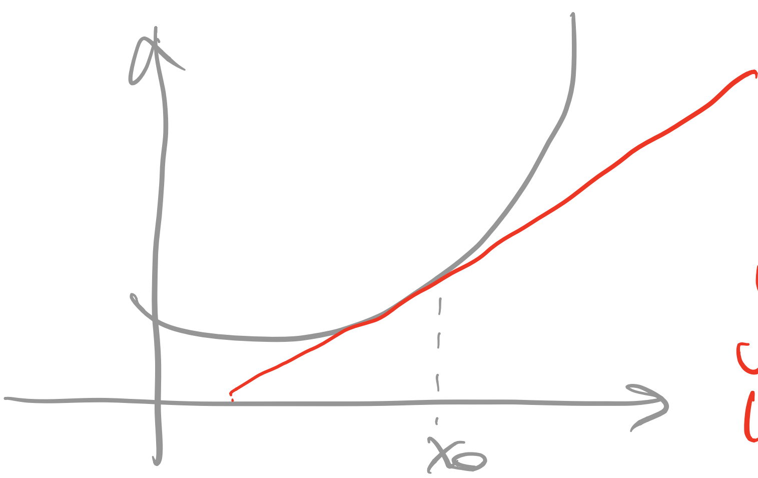


grafico di f strettamente sopra la retta tg. in un suo punto $(x_0, f(x_0))$

A.Cutri 26/11/18

Funzioni convesse e derivata seconda

$f:(a,b)\to\mathbb{R}$, f due volte derivabile in (a,b)
Allora
f è convessa in $(a,b) \iff f''(x)\geq 0 \ \forall x\in(a,b)$

OSS: Se x_0 è p.to critico per f, essendo $f'\nearrow$
$\Rightarrow$ $f'(x)\geq 0$ $x>x_0$
$f'(x)<0$ $x<x_0$ $\Rightarrow$ x_0 è punto di minimo <u>assoluto</u>
Se f è strettamente convessa
$\Rightarrow$ tale minimo è <u>unico</u>

<u>DEF</u> DI PUNTO DI <u>FLESSO</u>

$f:(a,b)\to\mathbb{R}$ $x_0\in(a,b)$ ed $\exists\, f'(x_0)\in\overline{\mathbb{R}}$

Allora <u>x_0 è un punto di flesso</u>

se f cambia tipo di concavità

attraversando x_0 cioè <u>se</u>
$\exists\, U_+(x_0)$ dove f è convessa
(o concava)
ed $\exists\, U_-(x_0)$ dove f è concava
(risp. convessa) $\quad (*)$

A.Cutri 26/11/18

Se $f'(x_0) = \pm\infty$ e vale (*)

$\Rightarrow$ x_0 è un flesso a tangente verticale

Teorema: Se f è derivabile 2 volte in x_0 e x_0 è punto di flesso

$\Downarrow$ (perché f' ha un estremo in x_0)

$f''(x_0) = 0$

OSS: x_0 può essere punto di flesso e f non essere derivabile 2 volte in x_0

Es: $f(x) = x^{5/3} = \sqrt[3]{x^5}$

$f'(0) = 0$ $\nexists f''(0)$

infatti $f'(x) = \frac{5}{3} x^{2/3}$; $f''(x) = \frac{10}{9} \frac{1}{x^{1/3}}$

ma $f'' > 0$ se $x > 0 \Rightarrow f$ conv.

$f'' < 0$ se $x < 0 \Rightarrow f$ concava

$\Rightarrow$ $x = 0$ punto di flesso ma $\nexists f''(0)$

A.Cutri 26/11/18

<u>OSS</u>: $f''(x_0)=0 \not\Rightarrow x_0$ punto di flesso

<u>ES</u>: $f(x)=x^4$ ha un minimo in $x=0$

anche se $f''(0)=12x^2\big|_{x=0}=0$

Studiare la funzione e disegnare grafico qualitativo

$$f(x) = -(x-2)e^{-\frac{1}{x-1}}$$

$$\operatorname{dom} f = \{x \neq 1\} = (-\infty,1) \cup (1,+\infty)$$

$x \in \operatorname{dom} f$ f è continua perché prodotto e composizione di funzioni continue

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = 0 \; ; \; \lim_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$$

$\Rightarrow x=1$ asintoto orizzontale

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} -(x-2)\left[1 - \frac{1}{x-1} + o\left(\frac{1}{x-1}\right)\right]$$

$-\frac{1}{x-1} \to 0$

$$= \lim_{x\to+\infty} (2-x) + \frac{x-2}{x-1} + o(1)$$

$$= 2-x+1+o(1) \quad \text{per } x \to +\infty$$

$$= 3-x+o(1) \qquad x\to+\infty$$

$= -\infty$

e $y = 3-x$ asintoto obliquo di f a $+\infty$

A.Cutri 26/11/18

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -(x-2)\left[1-\frac{1}{x-1}+o\left(\frac{1}{x-1}\right)\right]$$

$x \to -\infty$

$\left(\text{perché } -\frac{1}{x-1} \to 0\right)$

$= 3-x+o(1) \quad x\to-\infty$

$\Rightarrow \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ e

$y = 3-x$ è

asintoto obliquo anche a $-\infty$

$$f'(x) = -e^{-\frac{1}{x-1}} - (x-2)e^{-\frac{1}{x-1}}\frac{1}{(x-1)^2} \qquad x \neq 1$$

$$= \frac{e^{-\frac{1}{x-1}}}{(x-1)^2}\left(2-x-\underbrace{(x-1)^2}_{x^2-2x+1}\right) = \underbrace{\frac{e^{-\frac{1}{x-1}}}{(x-1)^2}}_{>0}\left(-x^2+x+1\right)$$

$\lim_{x\to1^+} f'(x) = 0 =: f'_+(1)$

sign $f'(x) =$ sign $\left(-x^2+x+1\right)$

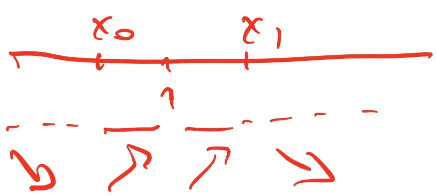
Pti critici $f'(x)=0 \iff x^2-x-1=0$

A.Cutri 26/11/18

$x = \frac{1\pm\sqrt5}{2}$

$x_0 = \frac{1-\sqrt5}{2}$ punto di minimo relativo

$x_1 = \frac{1+\sqrt5}{2}$ max. rel.



$$f''(x) = \frac{(-x^2+x+1)}{(x-1)^2} e^{-\frac{1}{x-1}} \frac{1}{(x-1)^2}$$

$$+ e^{-\frac{1}{x-1}} \frac{(-2x+1)(x-1)^2 - (-x^2+x+1)\,2(x-1)}{(x-1)^4}$$

quindi

$$f''(x) = \frac{e^{-\frac{1}{x-1}}}{(x-1)^4}\left[-x^2+x+1+(x-1)\left(\cancel{-2x^2}+3x-1 + \cancel{2x^2}-2x-2\right)\right]$$

$$= \frac{e^{-\frac{1}{x-1}}}{(x-1)^4}\left[\cancel{-x^2}+\cancel{x}+1+\cancel{x^2}-\cancel{x}-3x+3\right]$$

$$= \frac{e^{-\frac{1}{x-1}}}{\underbrace{(x-1)^4}_{>0}}(4-3x)$$

segno f'' = segno $(4-3x)$

Quindi

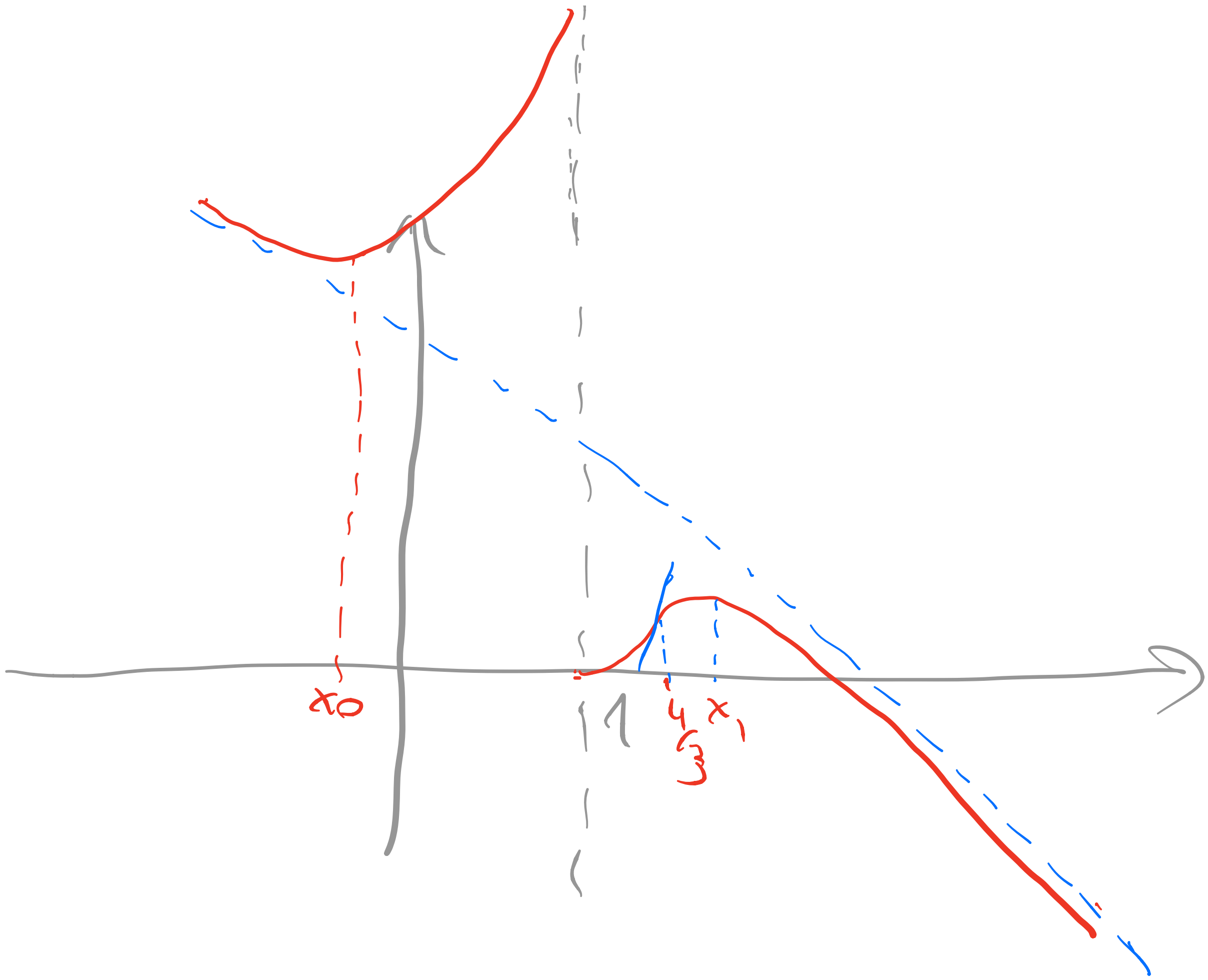
se $x < 4/3$ $f'' > 0 \Rightarrow f$ è convessa

se $x > 4/3$ $f'' < 0 \Rightarrow f$ è concava

$x = 4/3$ punto di flesso

oss $f'(4/3) = 5e^{-3}$ coeff angolare della tg nel pto di flesso

A.Cutri 26/11/18



A.Cutri 26/11/18