Lezioni del 19 e 21 novembre 2018

Docente:Alessandra Cutri

Argomenti:Calcolo differenziale per funzioni reali di variabile reale:derivata della funzione inversa (dim.)e appl. al calcolo della derivata di arcsin(x), arcos(x), arctan(x), definizione di estremo locale, di punto critico, teorema di Fermat sui punti critici, monotonia e segno della derivata, teoremi di Rolle, del valor medio, Cauchy

Argomenti:discontinuità della funzione derivata, funzioni Lipschitziane:def.ed esempi, funzioni derivabili ma con derivata non continua,esercizi su massimi e minimi, studio di funzioni

DERIVATA FUNZIONE INVERSA

Sia $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad I$ intervallo

$x_0 \in \mathring{I}$, $f \in C(I)$ e strettamente monotona in I

$\Rightarrow$ f^{-1} è continua e strettamente monotona nell'intervallo $f(I)$

Se f è derivabile in x_0 e $f'(x_0) \neq 0$

$\Downarrow$

f^{-1} è derivabile in $f(x_0) =: y_0$ e

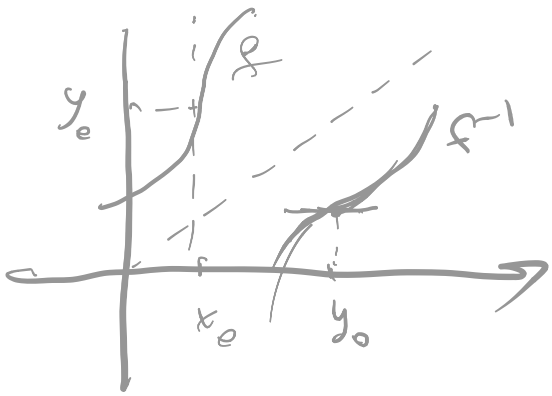
$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

con la relazione $\boxed{f(x_0) = y_0}$

Se $f'(x_0) = 0$ e $f \nearrow \Rightarrow (f^{-1})'(y_0) = +\infty$

Se $f'(x_0) = 0$ e $f \searrow \Rightarrow (f^{-1})'(y_0) = -\infty$

Se $f'(x_0) = \pm\infty \Rightarrow (f^{-1})'(y_0) = 0$



DIM: Supponiamo $f'(x_0) \neq 0$

$y_0 = f(x_0)$ se $y = f(x)$ $x = f^{-1}(y)$

$y \to y_0 \Rightarrow x \to x_0$ (f^{-1} è continua)

$$\lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0}$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

$$= \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

Esempio

$f(x) = \operatorname{sen} x$ in $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow f^{-1}(x) = \arcsin x$

$f'(x) = \cos x \neq 0$ in $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$$(\arcsin y)' = \frac{1}{\cos x \,\big|_{x = f^{-1}(y) = \arcsin y}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

$\Rightarrow y = \operatorname{sen} x$

Infatti

per $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ $\cos x > 0$

$\Rightarrow \cos x = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x} = \sqrt{1-y^2}$ $\boxed{y = \operatorname{sen} x}$

Quindi

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$f(x) = \arccos x \Rightarrow (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ in $(0, \pi)$

$$(\arccos x)' = \frac{1}{-\operatorname{sen}(y)\,\big|_{y = \arccos x}} \qquad \Leftrightarrow x = \cos y$$

Ma $\operatorname{sen} y > 0$ $y \in (0, \pi)$ $\Rightarrow \operatorname{sen} y = \sqrt{1 - \cos^2 y} = \sqrt{1-x^2}$

$$f(x) = \operatorname{arctg} x \qquad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\boxed{(\operatorname{arctg} x)'} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}}\Bigg|_{y = \operatorname{arctg} x} \qquad x = \operatorname{tg} y$$

$$= \frac{1}{\frac{\cos^2 y + \operatorname{sen}^2 y}{\cos^2 y}} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y} = \boxed{\frac{1}{1+x^2}}$$

$$(\operatorname{arctg}(1+x^3))' = \frac{1}{1+(1+x^3)^2} \cdot 3x^2$$

$$(\lg y)' = \frac{1}{e^x}\Bigg|_{x = \lg y} = \frac{1}{e^{\lg y}} = \frac{1}{y} \qquad y > 0$$

ESTREMO LOCALE (o RELATIVO) DI F

Sia $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad x_0 \in X$ si dice punto di minimo locale (o relativo) di f se

$$\exists\, U_{x_0} : \forall x \in U_{x_0} \cap X \quad f(x) \geq f(x_0)$$

Si dice che x_0 è punto di minimo locale forte se

$$\exists\, U_{x_0} : \forall x \in U_{x_0} \cap X \ \ x \neq x_0 \Rightarrow f(x) > f(x_0)$$

$x_1 \in X$ è punto di massimo locale (o relativo) di f se

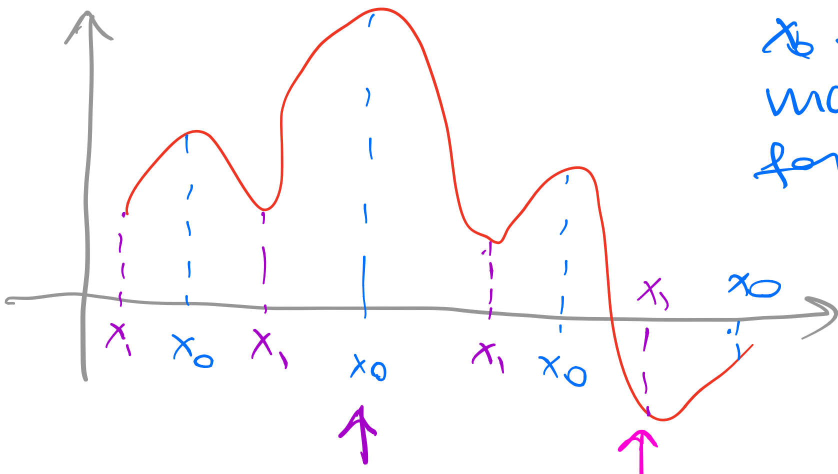
$$\exists\, V_{x_0} : \forall x \in V_{x_0} \cap X \Rightarrow f(x) \leq f(x_0)$$

forte se per $x \neq x_0$, $x \in V_{x_0} \cap X$ $\quad f(x) < f(x_0)$

I punti di massimo o minimo relativo si chiamano

ESTREMI LOCALI

A.Cutri 19/11/18

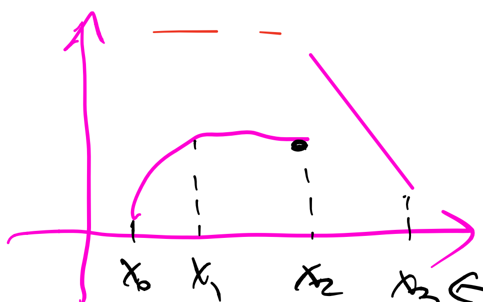


x_0 tutti massimi relativi forti

x_1 tutti minimi relativi forti

punto di massimo assoluto (o globale)

punto di minimo assoluto (o globale)



x_3 ← minimo locale forte

min. loc. forte

max locale non forte

minimo locale non forte

$x \in (x_1, x_2)$ sono punti di max e min locale

DEF. PUNTO CRITICO O STAZIONARIO:

Sia f derivabile in x_0. Se

$\boxed{f'(x_0) = 0} \Rightarrow$ x_0 è punto critico o stazionario per f

ESTREMI LOCALI E DERIVATE

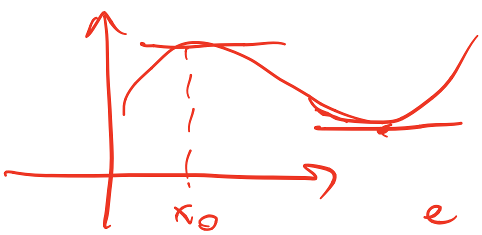
TEOREMA (di FERMAT)

Siano $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ $x_0\in(a,b)$ interno ad (a,b)

Se x_0 è un estremo locale per f

e f è derivabile in x_0 $\Rightarrow$ $\boxed{f'(x_0)=0}$

cioè x_0 è CRITICO



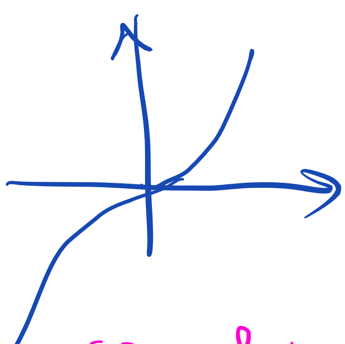
Se x_0 è un estremo locale

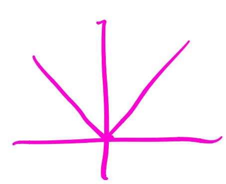
e graph f ha tg in $(x_0, f(x_0))$

$\Rightarrow$ la tangente è orizzontale

OSS $\Leftarrow$ falso : $f(x)=x^3$ $f'(0)=0$

ma $x_0=0$ non è un estremo locale





OSS: f può non essere derivabile

in punti di estremo : $f(x)=|x|$ ha minimo

in $x=0$ ma lì non è der.

A.Cutri 19/11/18

DIM: Se x_0 è un estremo locale <u>interno</u> ad (a,b) $\Rightarrow$ $\exists\, U_{x_0} \subset (a,b)$ t.c. $\forall x \in U_{x_0}$ $f(x)-f(x_0)$ ha segno costante

$\Downarrow$

$\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ cambia segno passando da sinistra a destra di x_0

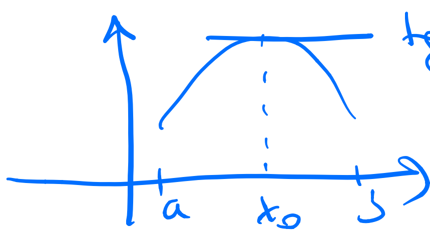
$\Rightarrow \displaystyle\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'_+(x_0)$ ≥ 0 se x_0 min rel. / ≤ 0 se x_0 max. rel.

$\displaystyle\lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'_-(x_0)$ ≤ 0 se x_0 min rel. / ≥ 0 se x_0 max rel

essendo f derivabile in x_0

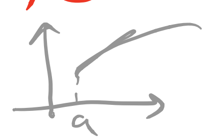
$\Rightarrow f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = f'(x_0)$

$\Rightarrow f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = f'(x_0) = 0$



<u>OSS</u>: Se $f:(a,b)\to\mathbb{R}$. Se f ha max rel. in $x_0=a$ e se $\exists\, f'_+(a) \in \mathbb{R}^*$

$\Rightarrow f'_+(a) \leq 0$



Se f ha min rel. in a e se $\exists\, f'_+(a) \in \mathbb{R}^*$

$\Rightarrow f'_+(a) \geq 0$

A.Cutri 19/11/18

Se f ha min rel in $x_0=b$ $\Rightarrow f'_-(b) \leq 0$

Se f ha max rel in $x_0=b$ $\Rightarrow f'_-(b) \geq 0$

MONOTONIA E DERIVABILITÀ

<u>OSS</u>

Se f è crescente in (a,b)
$$\Rightarrow \forall x_1, x_2 \in (a,b) \quad P(x_1,x_2) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \geq 0$$

Se f è decrescente in (a,b)
$$\Rightarrow \forall x_1, x_2 \in (a,b) \quad P(x_1,x_2) \leq 0$$

Quindi

se f è derivabile in (a,b) e <u>crescente</u>

$$\Downarrow$$

$$f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a,b)$$

Se f è derivabile in (a,b) e decrescente

$$\Downarrow$$

$$f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in (a,b)$$

Vale il viceversa?
Cioè dal segno della derivata si può dedurre la monotonia?

Sì per Teorema del Valor Medio!

Teorema del Valor Medio (di Lagrange)

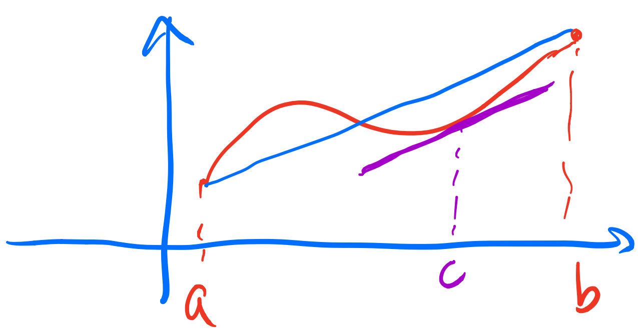
Se $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $f\in C([a,b])$,

f derivabile in (a,b)

Allora $\exists\, c\in(a,b)$:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

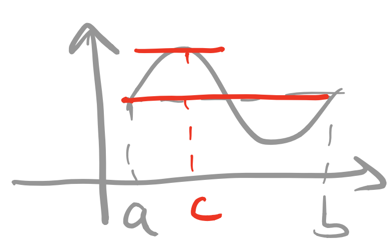
(cioè $\exists$ un punto $c\in(a,b)$ tale che la retta tang. al grafico di f in $(c,f(c))$ è parallela alla retta che congiunge $(a,f(a))$ con $(b,f(b))$)



CASO PARTICOLARE : $f(a)=f(b)$

$\Downarrow$

TEOREMA DI ROLLE



TEOREMA DI ROLLE: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$
$f\in C([a,b])$, f derivabile in (a,b)

$f(a)=f(b) \Rightarrow \exists c\in(a,b): f'(c)=0$

DIM (T. Rolle):
Poiché $f\in C([a,b]) \Rightarrow \exists x_0, x_1\in[a,b]$
T. Weierstrass
t.c. $f(x_0)=\min_{[a,b]} f$ e $f(x_1)=\max_{[a,b]} f$

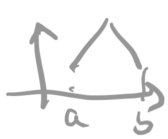
<u>1° caso</u>: min e max di f sono assunti nella frontiera $\Rightarrow$ f è costante su $[a,b]$
$f(a)=f(b)$

$\Rightarrow f'(c)=0 \ \forall c\in(a,b) \Rightarrow$ fine

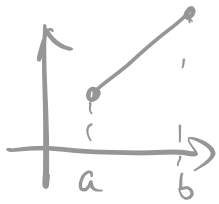
<u>2° caso</u>: Uno dei due punti tra x_0 e x_1 è interno ad (a,b). Supponiamo $x_0\in(a,b) \Rightarrow x_0$ è un minimo relativo interno e f è derivabile in x_0
$\Rightarrow f'(x_0)=0 \rightsquigarrow c=x_0$ ■
T. Fermat

<u>OSS</u>: le ipotesi del Teorema di Rolle sono tutte essenziali:

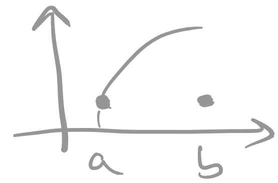
A.Cutri19/11/18



$\nexists c\in(a,b): f'(c)=0$
$\to$ f non è derivabile in $x_0\in(a,b)$



$f(a) \neq f(b)$



f non è continua in $x=b$

DIM del T. di Lagrange: si fa applicando il teorema di Rolle alla funzione

$g(x) = f(x) -$ retta passante per $(a, f(a))$, $(b, f(b))$

cioè

$$g(x) := f(x) - \left(f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) \right)$$

$g \in C([a,b])$, g è derivabile in (a,b)

$$g(a) = f(a) - f(a) = 0$$

$$g(b) = f(b) - (f(a) + f(b) - f(a)) = 0$$

$\Downarrow$ T. di Rolle

$$\exists c \in (a,b) : g'(c) = 0$$

$$\Rightarrow f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$ cvd

Corollario T.V.M.

Se $f'(x) \geq 0 \ \forall x \in (a,b) \Rightarrow f \nearrow$ in (a,b)

Infatti siano $x_1, x_2 \in (a,b)$ $x_1 < x_2$
$\Rightarrow f$ è continua in $[x_1, x_2]$ e derivabile in $(x_1, x_2) \Rightarrow \exists c \in (x_1, x_2)$:

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = P(x_1, x_2)$$

Quindi $f'(c) \geq 0 \Rightarrow P(x_1, x_2) \geq 0$
$\Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1) \Rightarrow f \nearrow$

Analogamente

Se $f'(x) \leq 0 \ \forall x \in (a,b) \Rightarrow f \searrow$ in (a,b)

Perciò se f è derivabile in (a,b)
$\Downarrow$
$f'(x) \geq 0 \ \forall x \in (a,b) \Leftrightarrow f \nearrow$ in (a,b)

$f'(x) \leq 0 \ \forall x \in (a,b) \Leftrightarrow f \searrow$ in (a,b)

Oss:

Se $f' > 0 \Rightarrow f \nearrow$ strettamente

$\Leftarrow$ **falso** $\quad f(x) = x^3$

Se $f' < 0 \Rightarrow f \searrow$ strettamente

$\Leftarrow$ **falso** $\quad f(x) = -x^3$

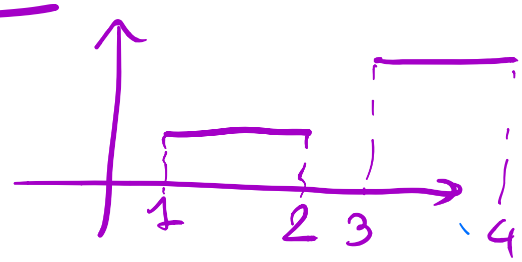
Corollario: Se $f'(x) = 0 \ \forall x \in (a,b)$

intervallo

$\Downarrow$

f è costante in (a,b)

Attenzione: Se il dominio non è **intervallo** può non essere vero:



$f' = 0$ ma f non è costante

Segno della derivata in un intorno di un punto critico $\rightsquigarrow$ determinare la natura

Sia x_0 un punto critico $(f'(x_0)=0)$

Se in un intorno di x_0 $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$

$$\underset{x_0-\varepsilon}{|}\ \ f'>0\ \nearrow\ \ \underset{x_0}{\bullet}\ f'(x_0)=0\ \ f'<0\ \searrow\ \ \underset{x_0+\varepsilon}{|}$$

x_0 è un punto di massimo relativo

$$\underset{x_0-\varepsilon}{|}\ \ f'<0\ \searrow\ \ \underset{x_0}{\bullet}\ \ f'>0\ \nearrow\ \ \underset{x_0+\varepsilon}{|}$$

x_0 punto di minimo relativo

$$\underset{x_0-\varepsilon}{|}\ \ f'>0\ \nearrow\ \ \underset{x_0}{\bullet}\ \ f'>0\ \nearrow\ \ \underset{x_0+\varepsilon}{|}$$

oppure

$$\underset{x_0-\varepsilon}{|}\ \ f'<0\ \searrow\ \ \underset{x_0}{|}\ \ f'<0\ \searrow\ \ \underset{x_0+\varepsilon}{|}$$

x_0 non è max. né min. rel.

I punti di estremo relativo si cercano:

- Tra i punti critici
- dove f non è derivabile
- Tra i punti di frontiera

Come si trattano i punti di frontiera?

1° senza fare calcoli

2° (se 1° non riesce) se $\exists\ f'_+(a), f'_-(b)$ in $\mathbb{R}^*$ guardando segno

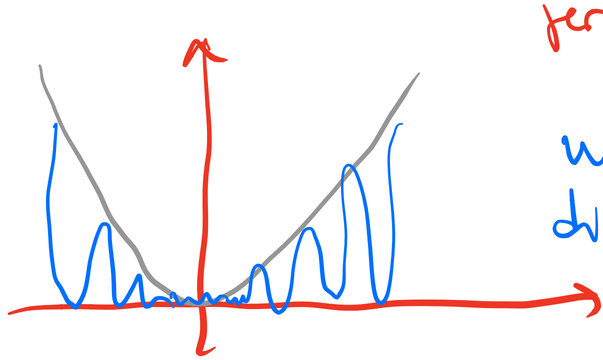
A.Cutri 19/11/18

Attenzione: Non è detto che se x_0 è un punto di estremo relativo (p.es. di minimo relativo $\exists$ intorno di x_0 t.c. f è decr. a sin di x_0 e crescente a dx di x_0)

Per esempio

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$x_0 = 0$ e $x_k = \frac{1}{k\pi}$ $k \in \mathbb{Z}$ sono tutti punti di minimo assoluto per f ma $x_k \to x_0 = 0$, $k \to +\infty$



non c'è alcun intorno di $x_0 = 0$ t.c. f è decr. a sin. di x_0 e crescente a dx di x_0

$f'(0) = 0$ $\quad f'(x) = 2x \operatorname{sen}^2 \frac{1}{x} + x^2 \, 2 \operatorname{sen}\frac{1}{x} \cos\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x^2}\right)$

$$= 2x \operatorname{sen}^2 \frac{1}{x} - 2 \operatorname{sen}\frac{1}{x} \cos\frac{1}{x}$$

Generalizzazione del T. di Lagrange

(Utile per T. di de L'Hôpital e Taylor)

T. di Cauchy: Siano $f, g \in C([a,b])$ e derivabili in (a,b). Allora

$\exists c \in (a,b)$:

$$(f(b)-f(a))g'(c) = (g(b)-g(a))f'(c)$$

Se $g(a) \neq g(b)$ e $g'(c) \neq 0$

$$\Downarrow$$

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

<u>OSS</u>: $g(x) = x \leadsto$ T. di Lagrange

<u>DIM</u> (T. Cauchy): si applica T. di Rolle alla funzione

A.Cutri 19/11/18

$$h(x) := (f(b)-f(a))g(x) - (g(b)-g(a))f(x)$$

$h \in C([a,b])$, h è deriv. in (a,b)

$h(a) = h(b) \Rightarrow \exists c \in (a,b) : h'(c) = 0$

$\Rightarrow (f(b)-f(a))g'(c) = (g(b)-g(a))f'(c)$ c.v.d.

Vediamo altre conseguenze del T.V.M.

Sappiamo che se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$

ed è tale che

$\exists\ f'_+(a)$ (o rispett. $\exists\ f'_-(b)$) in $\mathbb{R}^*$

allora

f ha max. locale in $x_0 = a \Rightarrow f'_+(a) \leq 0$

f ha min. locale in $x_0 = a \Rightarrow f'_+(a) \geq 0$

rispett.:

f ha max. locale in $x_0 = b \Rightarrow f'_-(b) \geq 0$

f ha min. locale in $x_0 = b \Rightarrow f'_-(b) \leq 0$

Come si possono calcolare $f'_+(a)$ e $f'_-(b)$?

(oltre che con la definizione)?

A.Cutri 21/11/18

Teorema (conseg. T.V.M.): Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$

continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b).

Se esiste in $\mathbb{R}^*$

$$\lim_{x \to a^+} f'(x)$$

$$\left(\text{rispett. } \lim_{x \to b^-} f'(x)\right)$$

Allora

$$f'_+(a) = \lim_{x \to a^+} f'(x)$$

$$\text{e} \quad f'_-(b) = \lim_{x \to b^-} f'(x)$$

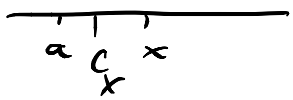
(oss: per def. $f'_+(a) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ e

$f'_-(b) = \lim_{x \to b^-} \frac{f(x) - f(b)}{x - b}$)

DIM: $\forall x \in (a,b)$ consideriamo l'intervallo (a,x) e

$\exists\, c_x \in (a,x)$: $$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(c_x) \quad (*)$$

T.V.M., $c_x \in (a,x)$

Se $x \to a^+$  $\Rightarrow c_x \to a^+$

Poiché $\exists$ per ipotesi $\lim_{x\to a^+} f'(x)$

$\Rightarrow \exists \lim_{x\to a^+} f'(c_x)$

$(\Leftarrow c_x \to a^+)$

$\Rightarrow$ 1° membro di $(*)$ $\to f'_+(a)$

2° membro di $(*)$ $\to \lim_{x\to a^+} f'(x)$

$\Downarrow$

$$f'_+(a) = \lim_{x\to a^+} f'(x)$$

Analogamente per $f'_-(b) = \lim_{x\to b^-} f'(x)$

OSS: Può esistere $f'_+(a)$ ma non esistere il $\lim_{x\to a^+} f'(x)$:

Esempio
$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x} & x>0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

A.Cutri 21/11/18

in $[0,+\infty)$

$\leadsto a=0$ $\quad f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2 \operatorname{sen} 1/x}{x} = 0$

$f'(x) = 2x \operatorname{sen}\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$ non ha limite per $x \to 0^+$

<u>Oss</u>: se consideriamo

$$f(x)=\begin{cases} x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases} \quad \text{in } \mathbb{R}$$

$f'(0)=0 \qquad f'(x)=2x\operatorname{sen}\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x} \quad x\neq 0$

Abbiamo $f'(x)$ continua in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ ed ha una discontinuità di II specie in $x=0$

fatto generale: le derivate di una funzione derivabile non può avere discontinuità di I specie

Infatti:

Sia $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ derivabile in (a,b). Supponiamo per assurdo

$\exists\, x_0\in(a,b)$ t.c. esistano finiti

$$\lim_{x\to x_0^+} f'(x) = f'_+(x_0)$$

$$\neq \qquad \underbrace{\overset{\text{Teor.}}{\Rightarrow}}_{\text{precedente}}$$

$$\lim_{x\to x_0^-} f'(x) = f'_-(x_0)$$

A.Cutri 21/11/18

for der. in $x_0 \Rightarrow f'_+(x_0)=f'_-(x_0)=f'(x_0)$

$\Rightarrow \lim_{x\to x_0^+} f'(x)=\lim_{x\to x_0^-} f'(x)=f'(x_0) \Rightarrow f'$ continua in x_0

Se $f \in C(X)$ e $f' \in C(X)$

$\Rightarrow f \in C^1(X)$ (Notazione)

Funzioni LIPSCHITZIANE

Sia $f:(a,b) \to \mathbb{R}$, $f \in Lip(a,b)$

se $\exists\, M > 0$ t.c. $\forall x, y \in (a,b)$

$$|f(x)-f(y)| \le M|x-y|$$

costante di Lip.

Cioè $\forall x, y \in (a,b)$, il rapporto

incrementale $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}$

è limitato in valore assoluto

$$\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| \le M$$

A.Cuti 21/11/18

<u>OSS</u>: se f è derivabile in (a,b) e

$|f'(x)| \le L \quad \forall x \in (a,b) \Rightarrow f \in Lip(a,b)$

<u>Oss</u>: se $f \in Lip(a,b) \Rightarrow f \in C(a,b)$

infatti $\forall x, x_0 \in (a,b)$

$$|f(x)-f(x_0)| \leq M|x-x_0|$$

$x \to x_0 \Rightarrow f(x) \to f(x_0)$

<u>Oss</u>: le funzioni lip non è detto siano derivabili:

<u>Es</u>: $f(x)=|x|$

$$\big||x|-|y|\big| \leq |x-y| \quad \text{(propr. dei moduli)}$$

$\Downarrow$

$|x|$ è lipschitz con cost. $M=1$

ma $f(x)=|x|$ non è deriv. in $x=0$

Se $f \in C^1(X)$ allora $f \in Lip(X)$

<u>se</u> X è <u>limitato</u> (infatti $f' \in C(X)$ + X limitato $\Rightarrow f'$ è limitata)

T. Weierstrass

Esercizio:

Det. max e min relativi e assoluti di

$$f(x) = e^{-x^4+5x^2-4} \quad \text{in } [-2,3]$$

Perché $f \in C([-2,3])$ $\underset{\text{T. Weierstrass}}{\Rightarrow}$ $\exists \min\limits_{[-2,3]} f$, $\exists \max\limits_{[-2,3]} f$

$f(-2) = e^{-16+20-4} = 1$

$f(3) = e^{-81+45-4} = e^{-40}$

} f nei punti di frontiera

in $(-2,3)$ f è derivabile ovunque

$f'(x) = f(x) \cdot (-4x^3 + 10x)$

$f'(x) = 0$ (punti critici)

$\Leftrightarrow x(-4x^2+10) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad x = \pm\sqrt{\frac{5}{2}}$;

Oss: f è pari $\Rightarrow f(-\sqrt{\frac{5}{2}}) = f(\sqrt{\frac{5}{2}}) = e^{9/4}$

$f(0) = e^{-4}$

$\Rightarrow e^{9/4} = f(\pm\sqrt{\frac{5}{2}})$ è max assoluto

$e^{-40} = f(3)$ è min assoluto

A.Cutri 21/11/18

Per gli estremi relativi, studiamo

segno $f'(x)$

$$f'(x)>0 \iff -4x^3+10x = 2x(-2x^2+5)>0$$

-2		$-\sqrt{\frac{5}{2}}$		0		$\sqrt{\frac{5}{2}}$		3
f'	$+$		$-$		$+$		$-$	
	$f\nearrow$		$f\searrow$		$f\nearrow$		$f\searrow$	

$$\exists \lim_{x\to -2^+} f'(x) = f'_+(-2) > 0$$

$$\exists \lim_{x\to 3^-} f'(x) = f'_-(3) < 0$$

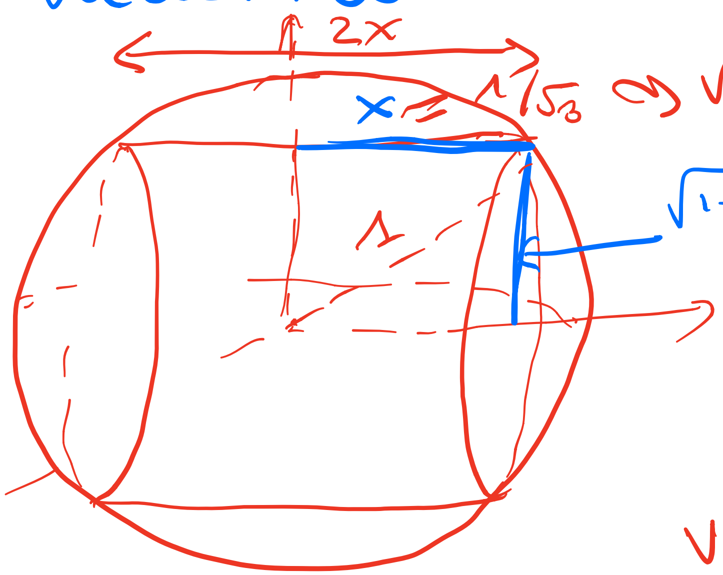
$\Rightarrow$ -2 pto di min rel.

3 " " min rel e assol.

0 " " min rel.

$\pm\sqrt{\frac{5}{2}}$ " " max rel. e assol.

Esercizio:
Tra tutti i cilindri inscritti in una sfera di raggio unitario, determinare quello di volume massimo, quello di superficie laterale massima, quello di superficie totale massima



$x = 1/\sqrt{3} \Rightarrow V_{max}$

$\sqrt{1-x^2} = r$

$$V(x) = 2x\pi r^2 = 2\pi x(1-x^2)$$

$x \in [0,1]$

$V(0) = V(1) = 0$

$V(x) = 2\pi x(1-x^2)$ è derivabile in $(0,1)$

$$V'(x) = 0 \iff 2\pi(1-x^2) + 2x\pi(-2x) = 2\pi(1-x^2-2x^2) = 2\pi(1-3x^2) = 0$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$$

L'unico punto critico in $(0,1)$ è $x_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ed è necessariamente il punto di max assoluto $V\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 2\pi\frac{1}{\sqrt{3}}\left(1-\frac{1}{3}\right) = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$

$\sigma_L(x) = 2x \cdot 2\pi r = 2x \cdot 2\pi \left(\sqrt{1-x^2}\right)$

$= 4\pi x \sqrt{1-x^2}$

$\sigma_L(0) = \sigma_L(1) = 0$

$\sigma_L \in C([0,1])$, σ_L è der. in $(0,1)$

$\exists \max_{[0,1]} \sigma_L(x)$ i punti critici di σ_L in $(0,1)$

sono le sol. di $\sigma_L'(x) = 0$

$\sigma_L'(x) = 4\pi\sqrt{1-x^2} + 4\pi x \frac{1}{\cancel{2}}(1-x^2)^{-1/2}(-\cancel{2}x)$

$= \frac{\pi}{\sqrt{1-x^2}}\left(4(1-x^2) - 4x^2\right) = 0$

$4 - 8x^2 = 0 \quad x^2 = \frac{1}{2}$

$x_0 \in (0,1) \Rightarrow \boxed{x_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}}$ ← strategia ottima

$\sigma_L\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 4\pi \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} = 2\pi$

Ciò che è importante non è il valore di V_{ott} o di σ_L ottimo ma il valore di x_{ott} cioè della x che lo realizza

$$\sigma_{TOT}(x) = \sigma_L(x) + 2\pi r^2 = \sigma_L(x) + 2\pi(1-x^2)$$

$$= 4\pi x\sqrt{1-x^2} + 2\pi(1-x^2)$$

$\sigma_{TOT}(0) = 2\pi$

$\sigma_{TOT}(1) = 0$

σ_{TOT} è derivabile in $(0,1)$ punti critici?

$$\sigma'_{TOT}(x) = 0 \iff 4\pi\sqrt{1-x^2} + \pi 4x \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{1-x^2}}(-\cancel{2}x) - 4\pi x = 0$$

$$\frac{4\pi}{\sqrt{1-x^2}}\left(1-x^2-x^2-x\sqrt{1-x^2}\right) = 0 \iff \frac{1-2x^2}{x} = \sqrt{1-x^2}$$

essendo $x>0$ e $\sqrt{1-x^2} \geq 0 \Rightarrow 1-2x^2 \geq 0$

$\Rightarrow x^2 < 1/2$

$$\frac{(1-2x^2)^2}{x^2} = 1-x^2$$

$1+4x^4-4x^2 = x^2-x^4 \iff 5x^4-5x^2+1=0$

$x^2 = t \rightsquigarrow 5t^2-5t+1=0$

$$t = \frac{5\pm\sqrt{25-20}}{10} = \frac{5\pm\sqrt{5}}{10} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{10}$$

$x^2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{10} > \frac{1}{2}$ NO

$x^2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10} \rightarrow \boxed{x_0 = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10}\right)^{1/2}}$

A.Cutri21/11/18

$$Q_{Tot}(x_{ott}) = \frac{4\pi}{\sqrt{10}}\left(5-\sqrt{5}\right)^{1/2}\left(1-\frac{5-\sqrt{5}}{10}\right)^{1/2} + 2\pi\left(\frac{5+\sqrt{5}}{10}\right)$$

$$\left(1-\frac{5-\sqrt{5}}{10}\right)^{1/2} = \left(\frac{5+\sqrt{5}}{\sqrt{10}}\right)^{1/2}$$

$$= \frac{4\pi}{10}\left(25-5\right)^{1/2} + 2\pi\left(\frac{5+\sqrt{5}}{10}\right) = 4\pi\sqrt{\frac{20}{100}} + \frac{2\pi}{10}\left(5+\sqrt{5}\right)$$

$$= 4\pi\frac{1}{\sqrt{5}} + 2\pi\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{10}\right)$$

$$= 2\pi\left(\frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{5}}\right) = \pi\left(1+\sqrt{5}\right)$$

max assoluto

Studiare la funzione

$$f(x) = \sqrt{1 - \frac{|x^2-1|}{x^2+1}}$$

e disegnarne un grafico qualitativo

$$|x^2-1| = \begin{cases} x^2-1 & \text{se } x^2 \geq 1 \iff |x| \geq 1 \\ 1-x^2 & \text{se } x^2 < 1 \iff |x| < 1 \end{cases}$$

Quindi

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1 - \frac{x^2-1}{x^2+1}} = \sqrt{\frac{x^2+1-x^2+1}{x^2+1}} = \sqrt{\frac{2}{x^2+1}} & |x| \geq 1 \\ \sqrt{1 - \frac{1-x^2}{x^2+1}} = \sqrt{\frac{x^2+1-1+x^2}{x^2+1}} = \sqrt{\frac{2x^2}{x^2+1}} & |x| < 1 \end{cases}$$

dom $f = \mathbb{R}$, $f \in C(\mathbb{R})$

f è pari $\quad (f(x) = f(-x))$

Si può studiare in $[0, +\infty)$ e poi fare prolungamento pari

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0 \qquad y = 0$ asintoto orizzontale

$f \geq 0 \qquad f(0) = 0 \to$ minimo assoluto

A.Cutri 21/11/18

Per gli intervalli di monotonia massimi/minimi rel $\to$ segno di $f'(x)$

$$f'(x) = \begin{cases} \sqrt{2}\left(-\frac{1}{\cancel{2}}\right)(x^2+1)^{-3/2}\cdot \cancel{2}x & |x|>1 \\ \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{\frac{2x^2}{x^2+1}}} \cdot \frac{\overset{2}{\cancel{4}}x(\cancel{x^2}+1) - \cancel{4x^3}}{(x^2+1)^2} & |x|<1 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-x\sqrt{2}}{\sqrt{(x^2+1)^3}} & |x|>1 \\ \frac{2x}{\sqrt{2x^2(x^2+1)^3}} & |x|<1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 1^+} f'(x) = \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{8}} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 1^-} f'(x) = \frac{2}{\sqrt{2\cdot 8}} = \frac{1}{2} \Rightarrow$$ $x=1$ punto angoloso

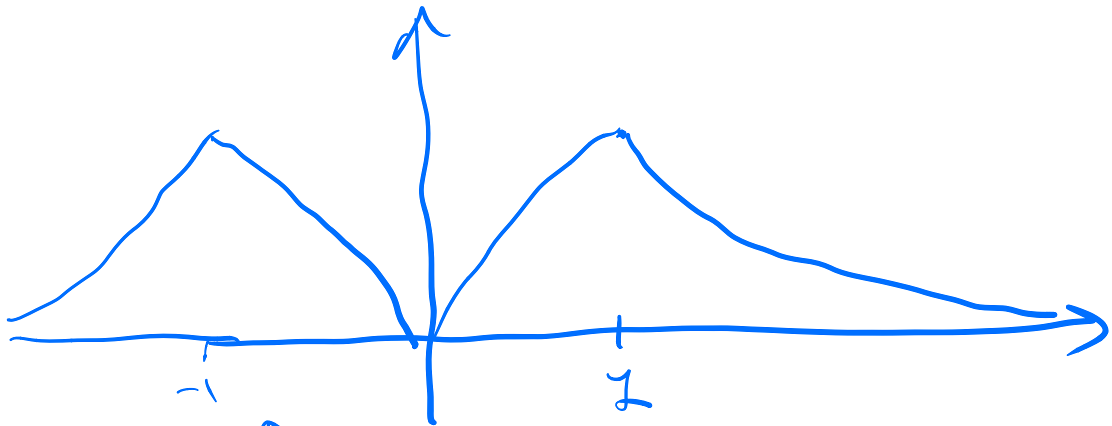
$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \frac{2}{\sqrt{2}}$$ $\Rightarrow$ poiché f è pari anche $x=0$ punto angoloso

$$\left(\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \frac{-2}{\sqrt{2}}\right)$$

$f' < 0$ se $x > 1$ $\rightsquigarrow$ f è decr. in $(1,+\infty)$

$f' > 0$ se $x \in (0,1)$ $\rightarrow$ f è cresc. in $(0,1)$

$\Rightarrow x = 1$ punto di max relativo



prolungo pari

sarà possibile analizzare le derivate seconde per determinare concavità/convessità, punti di flesso

$\rightsquigarrow$ prossime lezioni!

Studiare la funzione

$$f(x) = e^{-|x|}\sqrt{x^2-5x+6}$$

e disegnarne un grafico qualitativo

$\text{dom} f = \{x \in \mathbb{R} : x^2-5x+6 \geq 0\}$

essendo $x^2-5x+6=0$ $\quad x = \dfrac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} \begin{smallmatrix} \nearrow 3 \\ \searrow 2 \end{smallmatrix}$

$\text{dom} f = \{x \in \mathbb{R} ; x \leq 2 \vee x \geq 3\}$

$= (-\infty, 2] \cup [3, +\infty)$

$f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \text{dom} f \qquad f \in C(\text{dom} f)$

$f(2) = f(3) = 0 \rightsquigarrow x=2, x=3$ sono punti di minimo assoluto

$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0 \Rightarrow y=0$ asintoto orizzontale a $+\infty$ e a $-\infty$

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}\sqrt{(x-2)(x-3)} & x \geq 0 \quad x \in \text{dom} f \\ e^{x}\sqrt{(x-2)(x-3)} & x < 0 \end{cases}$$

se $x \in (0,2) \cup (3,+\infty)$

$$f'(x) = -e^{-x}\sqrt{x^2-5x+6} + e^{-x}\frac{1}{2\sqrt{x^2-5x+6}}(2x-5)$$

$$= \frac{-2(x^2-5x+6)+2x-5}{2e^{x}\sqrt{x^2-5x+6}} = \frac{-2x^2+12x-17}{2e^{x}\sqrt{x^2-5x+6}}$$

se $x \in (0,2) \cup (3,+\infty)$

$$\text{sign } f' = \text{sign } (-2x^2+12x-7)$$

$$2x^2-12x+17=0 \iff x = \frac{6 \pm \sqrt{36-34}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{2}}{2}$$

$\Rightarrow$

$f' > 0$ se $\dfrac{6-\sqrt{2}}{2} < x < \dfrac{6+\sqrt{2}}{2}$

$\uparrow$

$\in (2,3)$

$\Rightarrow x \in (0,2) \quad f' < 0 \Rightarrow f \searrow$

$x \in \left(3, \dfrac{6+\sqrt{2}}{2}\right) \quad f' > 0 \Rightarrow f \nearrow$

$x > \dfrac{6+\sqrt{2}}{2} \quad f' < 0 \Rightarrow f \searrow$

$\dfrac{6+\sqrt{2}}{2} = x_0$ punto di max. rel.

Se $x<0$

$$f'(x) = e^x \sqrt{(x-2)(x-3)} + \frac{e^x}{2\sqrt{x^2-5x+6}}(2x-5)$$

$$= \frac{e^x}{2\sqrt{x^2-5x+6}}\left(2(x^2-5x+6)+2x-5\right)$$

$$\text{segn } f' = \text{segn}\left(2x^2-8x+7\right)$$

$$2x^2-8x+7=0 \quad x = \frac{4 \pm \sqrt{16-14}}{2} \begin{cases} \frac{4+\sqrt{2}}{2} \\ \frac{4-\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad x<0 \quad f'(x)>0 \Rightarrow f \nearrow$$

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \frac{-17}{2\sqrt{6}}$$

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \frac{7}{2\sqrt{6}}$$

$\Rightarrow$ $x=0$ punto angoloso di max rel.