

Lezioni del 17 e 18 ottobre 2018

Analisi matematica I (a.a.2018/19)

Docente: Alessandra Cutrì

Limiti di successioni: Definizioni e proprietà principali- Alcuni limiti notevoli- Algebra dei limiti- Prime forme indeterminate

Limiti notevoli conseguenza della dis. di Bernoulli, limite di successioni monotone, definizione del numero di Nepero e

DEFINIZIONE di

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$n \longrightarrow a_n$$

SUCCESSIONE

$$o f: \mathbb{N} \cap [n_0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$$
$$n \longrightarrow a_n$$

$$f(n) =: a_n$$

$$\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \quad o \quad \{a_n\}_{n \geq n_0}$$

Es. $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \quad n \in \mathbb{N}$

$$a_n = \frac{1}{n} \quad n \geq 1 = n_0$$

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n} \quad n \geq 1 = n_0$$

OSS: Abbiamo visto che l'unico
punto di accumulazione di $\mathbb{N}$
è $+\infty$ ($\in \mathbb{R}^*$)

I punti di accumulazione
fondamentali

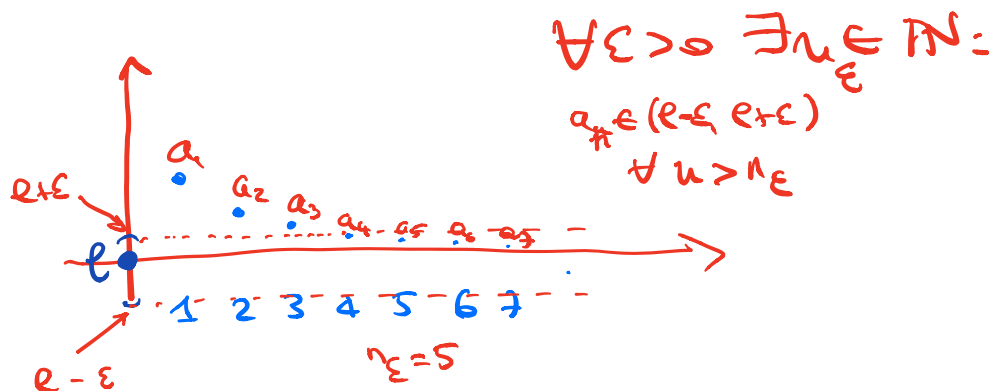
per la definizione di LIMITE

LIMITE $\sim$ comportamento di una
funzione nell'intorno di punti di
accumulazione del suo dominio

DEF. $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l \in \mathbb{R}$

l è l'unico punto di accumulazione di $\mathbb{N}$
(o più in generale di $\mathbb{N} \cap [n_0, +\infty)$)

Se $\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} :$
 $|a_n - l| < \varepsilon \quad \forall n > n_\varepsilon$



oss: $|a_n - l| < \varepsilon \Leftrightarrow a_n \in (l - \varepsilon, l + \varepsilon)$
 $I_\varepsilon^u(l)$

Cioè $\forall$ Intervallo di e $I_\varepsilon(e)$

$\exists$ Intervallo di $+\infty$: $[n_\varepsilon, +\infty]$

t.c.

$$(*) \quad a_n \in I_\varepsilon(e) \quad \forall n \in [n_\varepsilon, +\infty)$$

($n_\varepsilon < +\infty$ non
è possibile
perciò) /

Se una proprietà P_n è

vera da un certo n in poi

si dice che è vera

DEFINITIVAMENTE

per $n \rightarrow +\infty$

$$(*) : a_n \in I_\varepsilon(e)$$

definitivamente
per $n \rightarrow +\infty$

Esempio :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Infatti : $\forall \varepsilon > 0$ la disuguaglianza

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon \text{ è soddisfatta se}$$

$$n > \frac{1}{\varepsilon} \quad \text{quindi } \forall n > n_{\varepsilon} = \left[\frac{1}{\varepsilon} \right] + 1$$

Quindi $\forall \varepsilon > 0 \quad a_n \in (-\varepsilon, \varepsilon)$

$$\text{se } n \in \left[\left[\frac{1}{\varepsilon} \right] + 1, +\infty \right)$$

c.v.d

Esercizio 2:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$$

Infatti: $\forall \varepsilon > 0 \quad \left| \frac{(-1)^n}{n} - 0 \right| < \varepsilon$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{1}{n} \right| < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$$

Quindi $\exists n_\varepsilon := \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1$ A. Cutri, 17/10/2018

$$\frac{(-1)^n}{n} \in (-\varepsilon, \varepsilon) \quad \forall n > n_\varepsilon$$

Esercizio

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

Infatti: $\forall \varepsilon > 0$ la disuguaglianza

$$\left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| < \varepsilon \quad (\Leftrightarrow) \quad \left| \frac{n - n - 1}{n+1} \right| < \varepsilon$$

$$(\Leftrightarrow) \quad \left| \frac{-1}{n+1} \right| < \varepsilon \quad (\Leftrightarrow) \quad n+1 > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$(\Leftrightarrow) \quad n > \frac{1}{\varepsilon} - 1 \quad (*)$$

Per cui se $\frac{1}{\varepsilon} \leq 1$ basta scegliere $n_{\varepsilon} = 0$

se $\frac{1}{\varepsilon} > 1$

$$n_{\varepsilon} := \left[\frac{1}{\varepsilon} - 1 \right] + 1$$

e $(*)$ vale $\forall n > n_{\varepsilon} \quad n_{\varepsilon} = \max\{0, \left[\frac{1}{\varepsilon} \right]\}$

Esercizio

$$a_n = \begin{cases} n! & n \leq 10 \\ \frac{1}{n} & n > 11 \end{cases}$$

$$n \leq 10$$

$$n > 11$$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$?

Si deve trovare l t.c.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : a_n \in (l - \varepsilon, l + \varepsilon) \quad \forall n > n_\varepsilon$$

Quindi il comportamento di a_n in un intorno di $+\infty$!

$$\Rightarrow l = 0$$

Cosa accade ai primi termini della successione NON INTERESSA !!

$$\text{Infatti } \forall \varepsilon > 0 \quad a_n \in (-\varepsilon, \varepsilon) \quad \forall n > n_\varepsilon$$

$$n_\varepsilon := \max \left\{ \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1, 10 \right\}$$

DEF

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$$

Se $\forall M > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} :$

$$a_n > M \quad \forall n > n_0$$

$$a_n \in (M, +\infty) \quad \forall n \in (n_0, +\infty)$$

$\hat{=}$
 $a_n > M$ definitivamente in n

Esempio: $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$ (ovvio)

$\forall M > 0$ scegliendo $n_0 = [M] + 1 \Rightarrow \text{ten}$

Esempio

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = +\infty$$

In fatti $\forall M > 0$ le disuguaglianze

$$2^n > M \quad (\Leftrightarrow) \quad n > \log_2 M$$

$$\text{Se } M \in (0, 1) \Rightarrow \log_2 M < 0 \Rightarrow n_0 = 0$$

$$\text{Se } M > 1 \Rightarrow \log_2 M > 0 \Rightarrow n_0 = [\log_2 M] + 1$$

$$\text{basta scegliere } n_0 = \max\{0, [\log_2 M] + 1\}$$

$$\Rightarrow 2^n > M \quad \forall n > n_0$$

DEF : $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty$

Se
 $\forall M > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$$a_n < -M \quad \forall n > n_0$$

Esempi : $a_n = -n \rightarrow -\infty \quad n \rightarrow +\infty$

$$a_n = -2^n \rightarrow -\infty \quad n \rightarrow +\infty$$

(*) $a_n = \lg_2 \frac{1}{n} \leftarrow$ vediamo

(*) $\rightarrow -\infty$ per $n \rightarrow +\infty$ Infatti

$$\forall M > 0 \quad \lg_2 \frac{1}{n} < -M \Leftrightarrow -\lg_2 n < -M$$

$$\Leftrightarrow \lg_2 n > M \Leftrightarrow n > 2^M \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \text{Scegliamo} \\ n_0 = \lfloor 2^M \rfloor + 1 \end{array}}$$

DEF : $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è INDETERMINATA

se NON AMMETTE LIMITE in $\mathbb{R}^+$
(quindi ne finito né infinito)

Esempio $a_n = (-1)^n$

$$a_n = (-1)^n = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ è pari} \\ -1 & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

OSS: $l \neq 1$ perché se $\varepsilon = 1/2$

$$(l - \varepsilon, l + \varepsilon) = (\frac{1}{2}, \frac{3}{2}) \not\ni a_{2k+1} \quad \forall k$$

Quindi $\exists \varepsilon_0 (= 1/2) > 0$ t.c. $\forall n_0 \in \mathbb{N} \exists n > n_0$:

$$a_n \notin (l - \varepsilon, l + \varepsilon) \quad (\text{basta prendere } n = 2n_0 + 1)$$

OSS $l \neq -1$ perché se $\varepsilon = 1/2$ $(l - \varepsilon, l + \varepsilon) = (-3/2, -1/2)$

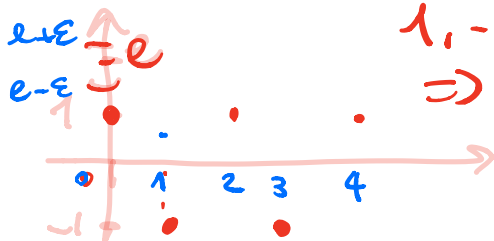
Quindi $\exists \varepsilon_0 (= 1/2) > 0$: $\forall n_0 \in \mathbb{N} \exists n > n_0$: ~~a_{2k}~~

$$a_n \notin (l - \varepsilon, l + \varepsilon) \quad (\text{basta prendere } n = 2n_0)$$

Se $l \neq 1$ e $l \neq -1$ non può avere limite:
basta scegliere $\varepsilon > 0$ t.c.

$$1, -1 \notin (l - \varepsilon, l + \varepsilon)$$

$\Rightarrow$ Tale intorno non contiene alcun a_n



Teorema: Unicità del limite

Sia $a_n \rightarrow l$

allora l è unico

Dim: Per assurdo $\exists l_1, l_2$
t.c. $l_1 \neq l_2$ e

$$a_n \rightarrow l_1 \quad \text{sia } \epsilon < \frac{|l_2 - l_1|}{2}$$

$$a_n \rightarrow l_2$$

$$\Rightarrow (l_1 - \epsilon, l_1 + \epsilon) \cap (l_2 - \epsilon, l_2 + \epsilon) = \emptyset$$

Se scegliendo $\epsilon = \epsilon$;

$$a_n \rightarrow l_1 \Rightarrow \exists n_1 : \forall n > n_1 \quad a_n \in (l_1 - \epsilon, l_1 + \epsilon)$$

$$a_n \rightarrow l_2 \Rightarrow \exists n_2 : \forall n > n_2 \quad a_n \in (l_2 - \epsilon, l_2 + \epsilon)$$

$$\Rightarrow \forall n > \max(n_1, n_2)$$

$$a_n \in (l_1 - \epsilon, l_1 + \epsilon) \cap (l_2 - \epsilon, l_2 + \epsilon) (= \emptyset) \quad \text{✗}$$



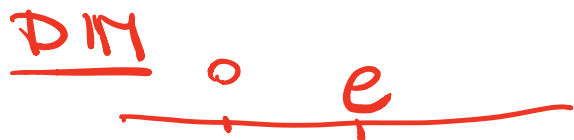
assurdo

Teorema (Permanente del segno)

Sia $a_n \rightarrow l$ con $l > 0$

$\Rightarrow a_n > 0$ DEFINITIVAMENTE
(cioè $\exists \bar{n} \in \mathbb{N} : a_n > 0 \forall n > \bar{n}$)

DIM



Se $a_n \rightarrow l$
 $\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} :$
 $a_n \in (l - \varepsilon, l + \varepsilon)$
 $\forall n > n_\varepsilon$

Scegliamo $\varepsilon = l/2 \Rightarrow a_n \in (l/2, 3l/2)$
 $\forall n > n_\varepsilon$

$\Rightarrow a_n > \frac{l}{2} > 0 \quad \forall n > n_\varepsilon =: \bar{n}$

Analogamente se $l < 0 \Rightarrow a_n < 0$
definitivamente (provarlo da te!)

Attenzione :

Se $a_n > 0$ (anche solo definitivamente)

~~$\Rightarrow l > 0$~~

Esempio $a_n = \frac{1}{n}$ ($> 0 \forall n \geq 1$)

però $l = 0$

Quello che è vero è

$a_n \geq 0$ definitivamente

$\Rightarrow l \geq 0$

o anche $a_n > 0$ definitivamente

$\Rightarrow l \geq 0$

Teorema: Se $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$
 $\Rightarrow a_n$ é limitada (oué $\exists M > 0$:

$$|a_n| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

DIM: Se $a_n \rightarrow l \Rightarrow$ escolhendo $\varepsilon = 1$,
 $\exists n_1 \in \mathbb{N} : a_n \in (l-1, l+1) \quad \forall n > n_1$
 i termini che non sono in $(l-1, l+1)$
 sono n_1 oué um número finito
 $\{a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n_1}\}$

$$\Rightarrow |a_n| < \max\{|a_0|, |a_1|, \dots, |a_{n_1}|, |l|+1\}$$

$$=: M$$

Oss:

$$a_n \in (l-1, l+1) \quad \forall n > n_1$$

$$(\Leftrightarrow) |a_n - l| < 1 \Leftrightarrow |a_n| < |l| + 1$$

$$\forall n > n_1$$

$$\Rightarrow |a_n| \leq M \quad \forall n \Rightarrow \text{Ter}$$

Oss: Viceversa falso: Ex $a_n = (-1)^n$
 $|a_n| \leq 1$ MA a_n NON
CONVERGENTE

TEOREMA DEL CONFRONTO (o dei CARABINIERI)

Siano $a_n \rightarrow l$ e $c_n \rightarrow l$

e sia $b_n : a_n \leq b_n \leq c_n$

definitivamente

$\Rightarrow b_n \rightarrow l$

Dim: $a_n \rightarrow l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad a_n \in (l-\varepsilon, l+\varepsilon)$
definit. ($\forall n > n_1$)

$c_n \rightarrow l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad c_n \in (l-\varepsilon, l+\varepsilon)$
definit. ($\forall n > n_2$)

Essendo
 $l-\varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < l+\varepsilon$ definit.
 $\forall n > \max\{n_1, n_2\}$

$\Downarrow$
 $l-\varepsilon < b_n < l+\varepsilon$ definit.
 $\forall n > \max\{n_1, n_2\}$

$\Rightarrow b_n \rightarrow l$

Teorema 2 del confronto:

Sia $a_n \rightarrow +\infty$ e $b_n \geq a_n$
definitivamente.

$$\Rightarrow b_n \rightarrow +\infty$$

(analogamente se $a_n \rightarrow -\infty$
e $b_n \leq a_n$ definitivamente
 $\Rightarrow b_n \rightarrow -\infty$)

Dim: $a_n \rightarrow +\infty (\Rightarrow \forall n > 0$

$a_n \geq n$ definitivamente in n

$$\Rightarrow b_n \geq a_n \geq n \text{ definit.}$$

$$\Rightarrow b_n \rightarrow +\infty$$

(dimostrare per esercizio l'altro
caso)

Esempio:

$$1. \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2 + 2} = 0$$

$$b_n = \frac{1}{n^2 + 2}$$

$$\underset{a_n}{0} < b_n < \underset{c_n}{\frac{1}{n}} \quad n^2 + 2 > n^2 > n$$

$\Rightarrow$ per il T. di confronto
 $b_n \rightarrow 0$

2. LIMITE NOTEVOLLE:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$$

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$$

$$n^n = n \cdot n \cdot n \cdot n \cdot \dots \cdot n \cdot n$$

$$0 < \frac{n!}{n^n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n} \cdot \dots \cdot \frac{n-1}{n} \cdot 1 \leq \frac{1}{n} \Rightarrow \text{T.E.81}$$

A. Cutri

17/10/2018

Quindi $n! \rightarrow +\infty$

$$n^n \rightarrow +\infty$$

$$\frac{n!}{n^n} \rightarrow 0$$

Significa che n^n diverge
più rapidamente di $n!$.

Altre proprietà:

- $a_n \rightarrow l \Rightarrow |a_n| \rightarrow |l|$

~~$\Leftarrow$~~ ES: $(-1)^n =: a_n$

$$|a_n| = 1 \rightarrow 1$$

a_n NON HA LIMITE

- $|a_n| \rightarrow 0 \Rightarrow a_n \rightarrow 0$

(per $l \neq 0$ non vale)



- $|a_n| \leq M, b_n \rightarrow \infty \Rightarrow a_n b_n \rightarrow 0$

Es $\underbrace{(-1)^n}_{a_n} \underbrace{\frac{1}{n}}_{b_n} \rightarrow 0$

$$0 \leq |a_n b_n| \leq M |b_n|$$

$$\downarrow$$

$$0$$

$$\downarrow$$

$$0$$

$$\Rightarrow a_n b_n \rightarrow 0$$

Es: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$

$$a_n = \sin n$$

$$b_n = \frac{1}{n}$$

$$|\sin n| \leq 1$$

$$b_n \rightarrow 0$$

Esercizio

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n + \cos n}{n^2 + 5n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n \left(1 + \frac{\cos n}{n}\right)}{n^2 \left(1 + \frac{5}{n}\right)}$$

$$0 \leq \frac{1}{n} \frac{1 + \frac{\cos n}{n}}{1 + \frac{5}{n}} \leq \frac{1}{n} \frac{2}{1}$$

$\uparrow$
def.

$= \frac{2}{n}$



Per le Teoreme del confronto

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n + \cos n}{n^2 + 5n} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > 0 \\ 1 & \text{se } \alpha = 0 \\ 0 & \text{se } \alpha < 0 \end{cases}$$

Infatti se $\alpha = 0 \Rightarrow n^\alpha = 1 \forall n$
Ovvero

se $\alpha > 0$: $\forall M > 0 \quad n^\alpha > M$

$$\Leftrightarrow n > M^{1/\alpha}$$

Quindi $\exists n_0 := \lceil M^{1/\alpha} \rceil + 1$
t.c. $\forall n > n_0 \quad n^\alpha > M$

se $\alpha < 0$

$\forall \varepsilon > 0 \quad |n^\alpha| = n^\alpha < \varepsilon \quad \text{se } n > n_\varepsilon?$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n^{-\alpha}} < \varepsilon \Leftrightarrow n^{-\alpha} > \frac{1}{\varepsilon} \quad \uparrow$$

$$\Leftrightarrow n > \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{-\frac{1}{\alpha}} \quad n_\varepsilon := \left\lceil \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{-\frac{1}{\alpha}} \right\rceil + 1$$

Oss: se $\alpha < 0 \quad n^\alpha > M \Leftrightarrow n < M^{1/\alpha}!!$

Algebra dei limiti

(vedere libri di Teoremi o
esercizi p.e. MS es. pag 166)

$$a_n \rightarrow a \quad b_n \rightarrow b \quad \boxed{a, b \in \mathbb{R}}$$

$\Downarrow$

$$a_n \pm b_n \rightarrow a \pm b$$

$$a_n \cdot b_n \rightarrow ab \quad ; \quad \begin{matrix} \text{costante} \\ c a_n \rightarrow ca \end{matrix}$$

$$\text{se } b \neq 0 \Rightarrow b_n \neq 0 \text{ definitivamente}$$

$$\Rightarrow \frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{a}{b}$$

$$a_n > 0, a > 0 \Rightarrow 2^{a_n} \rightarrow 2^a$$

Proviamo che $a_n b_n \rightarrow ab$:
 $n \rightarrow +\infty$

Quindi $a_n b_n \rightarrow ab$ perché:

$$|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab|$$

$$= |a_n (b_n - b) + b (a_n - a)| \quad (*)$$

$$\leq |a_n| |b_n - b| + |b| |a_n - a|$$

DIS,
TRIANGOLO

Ma $a_n \rightarrow a \Rightarrow |a_n| \leq M$ det.
per qualche $n \gg$

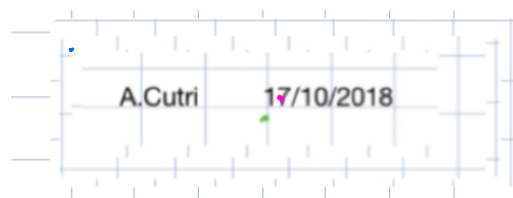
$$+ |a_n - a| \rightarrow 0$$

$$b_n \rightarrow b \Rightarrow |b_n - b| \rightarrow 0$$

$\Downarrow$

$$0 \leq |a_n b_n - ab| \leq \underbrace{M |b_n - b| + |b| |a_n - a|}_{\rightarrow 0}$$

T. confronto $\Rightarrow$ Terz



Se una delle due successioni (o entrambe) diverge?

$$a_n \rightarrow a \in \mathbb{R} \quad b_n \rightarrow +\infty$$

$\Downarrow$

$$a_n + b_n \rightarrow +\infty$$

$$a_n - b_n \rightarrow -\infty$$

$$a + \infty = +\infty$$

$$a - \infty = -\infty$$

$$\text{Se } a_n \rightarrow +\infty \text{ e } b_n \rightarrow +\infty$$

$$\Rightarrow a_n + b_n \rightarrow +\infty$$

$$+\infty + \infty = +\infty$$

$$(\text{analogamente } -\infty - \infty = -\infty)$$

$$\text{Ma } a_n - b_n \rightarrow ???$$

$$+\infty - \infty \quad \text{forma indeterminata}$$

$$-\infty + \infty$$

"



"

Che significa che 18/10/2018

$+\infty - \infty$ è una forma indeterminata?

Che non c'è una regola per determinare $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n - b_n$

se $a_n, b_n \rightarrow \pm\infty$

una dipende dalle

succesioni che si considerano

ES: • $a_n = n$ $b_n = n$

$$\Rightarrow a_n - b_n = n - n = 0 \quad \forall n$$

$$\Rightarrow a_n - b_n \rightarrow 0$$

$$\bullet \quad a_n = n \quad b_n = n^2$$

$$\Rightarrow a_n - b_n = n - n^2 = n(1 - n) \leq -n$$

$$\Rightarrow a_n - b_n \rightarrow -\infty$$

ES:

- $a_n = n^2 \quad b_n = n$

$$a_n - b_n = n^2 - n = n(n-1) > n \text{ def}$$

$$\Rightarrow a_n - b_n \rightarrow +\infty$$

- $a_n = n \quad b_n = n+1$

$$\Rightarrow a_n - b_n = n - n - 1 = -1 \rightarrow -1$$

Esercizio

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = ? \quad \text{f. indet}$$

$n \rightarrow +\infty$

$+\infty - \infty$

$$\begin{aligned} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} &= \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = 0$$

(c. confronto)

Allora nell'elaborazione dei limiti:

Se $a_n \rightarrow a \neq 0$, $b_n \rightarrow +\infty$

$$a_n b_n \rightarrow (\text{segno di } a) \infty$$

$$\frac{1}{b_n} \rightarrow 0$$

$$\frac{a}{0} = \infty \text{ (dipende dal segno di } a)$$

$$\frac{a}{\infty} = 0$$

$$a \cdot (\infty) = (\text{segno } a) \infty$$

Forme indeterminate:

$$\frac{0}{0}$$

$$\frac{\infty}{\infty}$$

$$0 \cdot \infty$$

$$0^0$$

$$1^{\pm \infty}$$

$$(\pm \infty)^0$$



$$a_n \rightarrow 1 \quad b_n \rightarrow \pm \infty \quad a_n^{b_n} \rightarrow ?$$

$1^n = 1 \forall n$
non è indef.

Ejemplo $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^3 + 2n + 4}{n^{2/3} + n^4 + \sqrt{n}}$

8/8

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^3 \left(1 + \frac{2}{n^2} + \frac{4}{n^3}\right)}{n^4 \left(\frac{1}{n^{10/3}} + 1 + \frac{1}{n^{7/2}}\right)}$$

$$n^4 \left(\frac{1}{n^{10/3}} + 1 + \frac{1}{n^{7/2}}\right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{n} \left(1 + \frac{2}{n^2} + \frac{4}{n^3}\right)}{\frac{1}{n^{10/3}} + 1 + \frac{1}{n^{7/2}}}$$

0 $\rightarrow$ 1 $\rightarrow$ 0 $\rightarrow$ 1

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = \begin{cases} 1 & \text{se } a=1 \\ +\infty & \text{se } a>1 \\ 0 & -1 < a < 1 \\ \text{non esiste} & a < -1 \end{cases}$$

Infatti:

• $a=1 \Rightarrow 1^n = 1 \quad \forall n$
 $\Rightarrow \limite = 1$

• $a>1$

$\forall \pi > 0 \exists n_\pi \in \mathbb{N} : a^n > \pi \quad \forall n > n_\pi ?$

Sì perché $a^n > \pi$
 $\Rightarrow n > \lg_a \pi$

quindi $n_\pi := [\lg_a \pi] + 1$

$\Rightarrow \forall n > n_\pi \quad a^n > \pi$

$\Rightarrow \lim a^n = +\infty \quad \text{se } a > 1$

• se $a \in (0, 1)$

$$\Rightarrow \frac{1}{a} > 1$$

$$a^n = \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^n}$$

$$\text{e } \left(\frac{1}{a}\right)^n \rightarrow +\infty$$

$$\Rightarrow a^n \rightarrow 0$$

• se $a \in (-1, 0)$

$$a = -(-a)$$

$$-a \in (0, 1)$$

$$a^n = (-1)^n (-a)^n \rightarrow 0$$

$\underbrace{\quad}_{\text{limitate}} \quad \underbrace{\quad}_{>0}$

• se $a < -1 \Rightarrow -a > 1$

$$a = -(-a) \Rightarrow a^n = (-1)^n (-a)^n$$

$$\Rightarrow \text{essendo } (-a)^n \rightarrow +\infty$$

$(-1)^n$ o scella tra

1 e $-1 \Rightarrow \text{lim. non esiste}$

Esercizio

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n}}{\left(\frac{4}{3}\right)^n} = 0$$

$$\text{oss: } \frac{4}{3} > 1 \quad \frac{4}{3} = 1 + \frac{1}{3}$$

$$\left(\frac{4}{3}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{3}\right)^n \geq 1 + n \cdot \frac{1}{3}$$

D. Bernoulli

$$0 \leq \frac{\sqrt{n}}{\left(\frac{4}{3}\right)^n} \leq \frac{\sqrt{n}}{1 + \frac{n}{3}} \leq \frac{\cancel{\sqrt{n}}}{\cancel{\sqrt{n}} \cdot \underset{\downarrow 0}{\frac{n}{3}}} \cdot 3$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{n}}{\left(\frac{4}{3}\right)^n} \rightarrow 0$$

Caso particolare di un limite notevole

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^\alpha}{a^n} = 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall a > 1$$

OSS: se $\alpha \leq 0$ ovvio (non è forma indet)

Dal caso $\alpha > 0$. Dimostriamo prima che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n}}{a^n} = 0 \quad \forall a > 1$$

(prima fatto con $a = \frac{4}{3}$)

$$\text{Se } a > 1 \Rightarrow a = 1 + \underbrace{(a-1)}_y$$

$$\Rightarrow a^n = (1 + (a-1))^n \geq 1 + n(a-1)$$

D.B.

$$0 < \frac{\sqrt{n}}{a^n} \leq \frac{\sqrt{n}}{n(a-1)} = \frac{1}{\sqrt{n}(a-1)} \rightarrow 0$$

$\Rightarrow$ Per p.r.T. confronto

A.Cutri	18/10/2018
---------	------------

Il caso $\alpha \neq 1/2$ si riconduce
al caso $\alpha = 1/2$:

$$n^\alpha = (\sqrt{n})^{2\alpha}$$

$$a^n = a^{\frac{n}{2\alpha} \cdot 2\alpha} = [(a^{1/2\alpha})^n]^{2\alpha}$$

$$\frac{n^\alpha}{a^n} = \left[\frac{\sqrt{n}}{(a^{1/2\alpha})^n} \right]^{2\alpha}$$

Se $a > 1$ e $\alpha > 0$ $a^{1/2\alpha} > 1$

$$b := a^{1/2\alpha} \quad (> 1)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n}}{b^n} = 0 \Rightarrow \frac{n^\alpha}{a^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\sqrt{n}}{b^n} \right)^{2\alpha} \rightarrow 0$$

OSS: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^\alpha}{a^n} = 0$

$\forall a > 1$

se $\alpha > 0$ $\frac{\infty}{\infty}$

Perché il rapporto tra i due infiniti tende a zero
 $\Rightarrow a^n$ tende all' ∞ più rapidamente di n^α

Corollario: se $b_n \rightarrow +\infty$ $n \rightarrow +\infty$

e $a > 1$

$\forall \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b_n^\alpha}{a^{b_n}} = 0$ (xix)

(caso $b_n = n$ è quello dimostrato)

$$\boxed{(\square) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|lg_a n|^\alpha}{n^\beta} = 0}$$

$\forall a > 0$
 $\forall \alpha \in \mathbb{R}$
 $\forall \beta > 0$

(limite notevole conseguenza di
(**))

Se $\alpha \leq 0 \rightarrow$ ovvio perché

$|lg_a n| \rightarrow +\infty \Rightarrow (*)$ non è una forma
indeterminata

Se $\alpha > 0$ $b_n := |lg_a n| \rightarrow +\infty$

$$\Rightarrow n = a^{lg_a n} \Rightarrow n^\beta = (a^\beta)^{lg_a n}$$

$\Rightarrow$ se $a > 1 \Rightarrow lg_a n > 0$ definita.

$$\Rightarrow b_n = lg_a n \Rightarrow n^\beta = (a^\beta)^{b_n} \quad c := a^\beta$$

$$\Rightarrow \frac{b_n^\alpha}{c^{b_n}} \rightarrow 0 \text{ per } (**)$$

$0 < a < 1 \Rightarrow \lg_a n < 0$ definit.

$$\Rightarrow b_n = -\lg_a n \rightarrow +\infty$$

$$n = a^{-b_n} = \left(\frac{1}{a}\right)^{b_n}$$

$$\Rightarrow n^\beta = \left[\left(\frac{1}{a}\right)^\beta\right]^{b_n} \quad c = \left(\frac{1}{a}\right)^\beta > 1$$

$$\Rightarrow \frac{n^\alpha}{c^{b_n}} \rightarrow 0$$

Cu o.e

$$\frac{|\lg_a n|^\alpha}{n^\beta} \rightarrow 0$$

Altro limite notevole

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^n}{n!} = 0 \quad \forall a > 0$$

Abbiamo costruito una
catena di infiniti

$$|\log n|^{\alpha} \quad n^{\beta} \quad a^n \quad n! \quad n^n$$

→
ordine crescente: cioè
andando da sinistra a
destra troviamo successori
che divergono sempre più
rapidamente

→ riprenderemo l'argomento
nella prossima lezione

Altri limiti notevoli:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad \forall a > 0$$

$a^{\frac{1}{n}}$

Infatti: se $a > 1$ $\Rightarrow \sqrt[n]{a} > 1$

$$\Rightarrow \sqrt[n]{a} = 1 + h_n \quad \text{con } h_n > 0$$

Se proviamo che $h_n \rightarrow 0$

$$\Rightarrow \sqrt[n]{a} \rightarrow 1$$

$$\text{Ma } \sqrt[n]{a} = 1 + h_n \Leftrightarrow a = (1 + h_n)^n$$
$$\stackrel{DB}{\geq} 1 + nh_n > h_n n$$

$$\Rightarrow 0 < h_n < \frac{a}{n} \Rightarrow \begin{array}{l} h_n \rightarrow 0 \\ \text{T. confronto} \Rightarrow \text{Terni} \end{array}$$

$$\text{Se } a \in (0,1) \Rightarrow \sqrt[n]{a} < 1$$

$$\Rightarrow \sqrt[n]{a} = \frac{1}{1+h_n} \text{ con } h_n > 0$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{(1+h_n)^n} \stackrel{\text{D.B.}}{\leq} \frac{1}{1+nh_n} < \frac{1}{nh_n}$$

$$\Rightarrow nh_n < \frac{1}{a} \Rightarrow 0 < h_n < \frac{1}{na}$$

$$\Rightarrow h_n \rightarrow 0 \Rightarrow \sqrt[n]{a} \rightarrow 1$$

Quindi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a} = 1$$

$$\forall a > 0$$

SUCCESSIONI MONOTONE

$\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ si dice

MONOTONA CRESCENTE se

$$a_n \leq a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

MON. STRETTAMENTE CRESCENTE

se $a_n < a_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

DEFINITIVAMENTE MONOTONA
CRESCENTE

se

$$\underline{a_n \leq a_{n+1}}$$

$\forall n > n_0$ opportuno
(cioè si vale
definitivamente
per $n \rightarrow +\infty$)

Analogamente

MONOTONA DECRESCENTE :
 $\Uparrow$

$$a_n \geq a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

n. STRETTAMENTE DECR.

$$(\Rightarrow) \quad a_n > a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

DEFINITIVAMENTE MONOTONA

se la relazione vale

non $\forall n \in \mathbb{N}$ ma
definitivamente in n

Esempio :

$$a_n = \frac{n+3}{n+4} \quad \text{è monotona?}$$

$$a_{n+1} = \frac{n+1+3}{n+1+4} = \frac{n+4}{n+5}$$

$$a_n \leq a_{n+1} ?$$

$$\text{si vede subito che } \frac{n+3}{n+4} \leq \frac{n+4}{n+5}$$

$$\Leftrightarrow (n+3)(n+5) \leq (n+4)^2$$

$$n^2 + 8n + 15 \leq n^2 + 8n + 16$$

$$\Leftrightarrow 15 \leq 16 \quad \text{vero}$$

Quindi $a_n \nearrow$

$$\text{oss: } a_n = \frac{n+3+1-1}{n+4} = 1 - \frac{1}{n+4}$$

Esercizio

$$a_n = n + \frac{10}{n} \quad n \geq 1$$

è monotona?

$$a_{n+1} = n+1 + \frac{10}{n+1}$$

$a_n \leq a_{n+1}$? vediamo

$$\cancel{n} + \frac{10}{\cancel{n}} \leq \cancel{n+1} + \frac{10}{n+1}$$

$\Downarrow$

$$10 \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \leq 1$$

$$\frac{\cancel{n+1} - \cancel{n}}{n(n+1)} \quad (\Leftrightarrow) \quad n(n+1) \geq 10$$

$$(\Leftrightarrow) \quad n \geq 3$$

Quindi non è monotona
crescente $\forall n \in \mathbb{N}$ ma lo è
definitivamente per $n \rightarrow \infty$

LIMITE DI SUCCESSIONI MONOTONE

Teorema: Sia $\{a_n\}$ una
successione monotone
crescente. Allora

$$\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n \quad (*)$$

(se a_n è monotone decrescente

$$\Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} a_n)$$

oss Se $\{a_n\}$ è definitivamente

crescente cioè $a_n \leq a_{n+1} \quad \forall n \geq n_1$

$$\Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \sup_{n \geq n_1} a_n$$

(analog. per succ. definitiv. decrescenti)

DM (*)

$a_n \nearrow$

$$\Leftrightarrow \exists \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n$$

Sia $L = \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n$

- Se $L < +\infty \Rightarrow a_n \leq L \quad \forall n$
quindi $\forall \varepsilon > 0$
 $a_n < L + \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Del resto perché $L \in \mathbb{R} \sup$
 $\Rightarrow L - \varepsilon$ non è maggiorante

Quindi $\exists n_\varepsilon : a_{n_\varepsilon} \geq L - \varepsilon$

Perché $a_n \nearrow \Rightarrow \forall n > n_\varepsilon$

$$a_n \geq a_{n_\varepsilon} > L - \varepsilon$$

Quindi $\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} :$

$$L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon \quad \forall n > n_\varepsilon$$

$\Rightarrow (*) \Leftrightarrow L < +\infty$

• Se $L = +\infty$
 $\Rightarrow \{a_n\}$ non è limitata
 superiormente
 $\Downarrow$

$\forall M > 0 \quad \exists n_M \in \mathbb{N} :$

$$a_{n_M} > M$$

Se $n > n_M$ essendo $a_n \nearrow$

$$\Rightarrow \underline{a_n} \geq a_{n_M} > M \quad \forall n > n_M$$

$\Downarrow$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n$$

$\Rightarrow (*)$

CvD

Esercizi: Calcolare

1) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n^2 + 1} - n$

2) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n^2 + n} - n$

3) Calcolare $\sup$ e $\inf$ di

$$A = \left\{ n + \frac{10}{n} \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$$

Consideriamo la successione

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

è monotona crescente infatti

$$(*) \quad a_{n+1} \geq a_n \quad \forall n \geq 1$$

Proviamo:

(*) è equivalente a

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$$
$$\text{Ma } \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}} \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

$$= \left[\frac{(n+2)n}{(n+1)^2} \right]^{n+1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

$$\begin{aligned} \text{we } (n+2)n &= (n+1+1)(n+1-1) \\ &= (n+1)^2 - 1 \end{aligned}$$

$$\left[\frac{(n+2)n}{(n+1)^2} \right]^{n+1} = \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2} \right)^{n+1}$$

$$\geq 1 - \frac{(n+1)}{(n+1)^2} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

D.B.

$$h = -\frac{1}{(n+1)^2} - 1$$

Quindi

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) \left(1 + \frac{1}{n} \right)$$

$$= \frac{\cancel{a_n}}{n+1} \cdot \frac{n+1}{\cancel{a_n}} = 1$$

$$\Rightarrow a_{n+1} \geq a_n \quad \forall n \geq 1$$

$$\Rightarrow \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \nearrow$$

Quindi

$$e := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sup_{n \geq 1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

NUMERO DI NEPERO

e E' UN NUMERO IRRAZIONALE

$$2 < e < 3$$

e viene usato come base per
i logaritmi

$$\log_e x \quad \text{o} \quad \ln x$$

(logaritmo naturale o NEPERIANO)

