Lezione del 15 novembre 2018

Docente:Alessandra Cutri

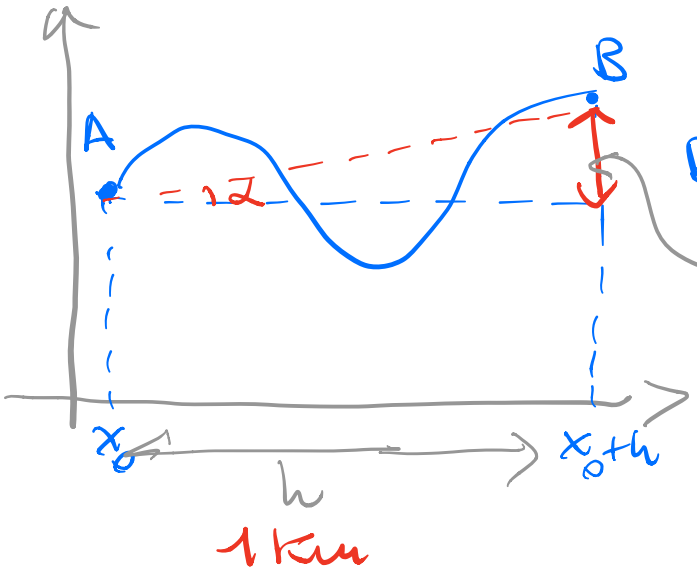
Argomenti:Calcolo differenziale per funzioni reali di variabile reale:definizione di derivata, retta tangente ed equivalenza tra derivabilità ed esistenza retta tang. non verticale al grafico di f, relazione tra continuità e derivabilità, tangente verticale, derivata destra, sinistra, punti angolosi, cuspidi; derivata di funzioni elementari, algebra delle derivate, derivata di funzione composta (dim.),esempi

Calcolo differenziale

= Pendenza media del percorso è 10%.

ogni 1 km sale di quota di 0,1 km = 100 m

Pendenza media = $\frac{\text{variazione di quota}}{\text{percorso}}$



$A = (x_0, f(x_0))$

$B = (x_0+h, f(x_0+h))$

$f(x_0+h) - f(x_0)$

= 100 m

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \text{tg}\,\alpha$$

rapporto incrementale di f relativo all'intervallo $[x_0, x_0+h]$

percorso = grafico di f

Def: $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ I intervallo

$x_0 \in \overset{\circ}{I}$ - f è derivabile in x_0

se

$\exists$ finito $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} =: f'(x_0)$

o, analogamente $x := x_0+h$:

$\exists$ finito $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$

OSS Def($\Rightarrow$)

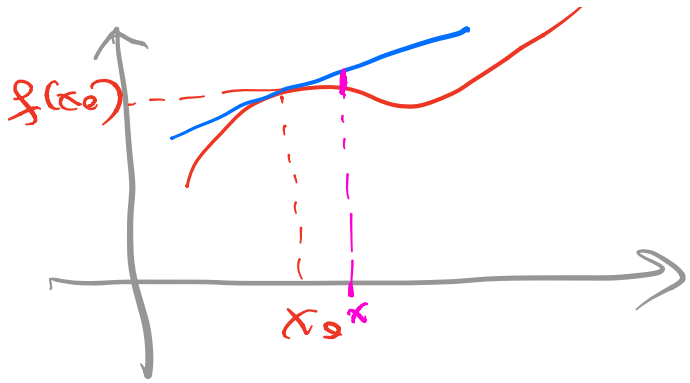
$$f(x_0+h) = f(x_0) + h f'(x_0) + o(h) \quad h \to 0$$

o, analogamente $h := x - x_0$

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)}_{x \to x_0} + o(x-x_0)$$

$y = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$

↑ è l'eq. di una retta che passa per $(x_0, f(x_0))$ ed ha coeff. ang. dato da $m = f'(x_0)$



Quando f è derivabile in x_0

$\Updownarrow$

il grafico di f è per $x \to x_0$ approssimabile con una retta di eq.

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

a meno di infinitesimi di ordine superiore a $x - x_0$ per $x \to x_0$

Def di retta tangente al grafico di f in $(x_0, f(x_0))$:

Una retta $y = f(x_0) + m(x - x_0)$ si dice tangente non verticale al grafico di f in $(x_0, f(x_0))$ se

$$f(x) = f(x_0) + m(x - x_0) + o(x - x_0) \quad x \to x_0$$

Quindi f è derivabile in $x_0 \iff$ grafico f ha in $(x_0, f(x_0))$ tg. non verticale e $m = f'(x_0)$

$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

è la migliore approssimazione lineare di f in un intorno di $P_0 = (x_0, f(x_0))$

Oss: $x_0 \in \overline{I} \Rightarrow \exists U_{x_0} \subset I$ quindi si può definire $f(x)$ per $x \to x_0$ e dunque anche

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Se $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in \overset{\circ}{X}$

$\Rightarrow \exists U_{x_0} \subset X \rightsquigarrow$ ok per $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

Se $X = [a, b]$ e $x_0 = a$

si può definire $\lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'_+(a)$ ↗ derivata destra

se $x_0 = b \Rightarrow$ può definire

$$\lim_{x \to b^-} \frac{f(x) - f(b)}{x - b} = f'_-(b)$$

↑ derivata sinistra in b

Se f è derivabile $\forall x_0 \in (a,b)$,

ammette derivata destra in a e ammette sinistra in b

$\Downarrow$

f è derivabile in $[a,b]$

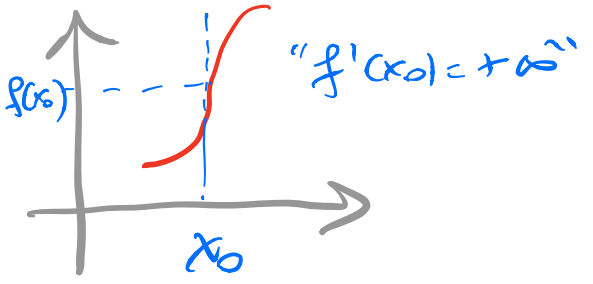
Punto a tangente verticale:

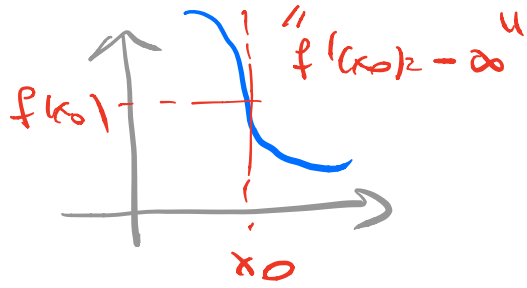
se $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = +\infty$ oppure $-\infty$

$\Downarrow$

f non è derivabile in x_0

ed il grafico di f ha in $(x_0, f(x_0))$ tangente verticale





Proprietà delle funzioni derivabili

derivabile in x_0 $\Rightarrow$ continua in x_0

Infatti se f è derivabile in $x_0 \in \mathring{X}$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0)$$

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0)$$

se $x \to x_0$ $\Rightarrow$ tende a zero, vale

$\Rightarrow f(x) \to f(x_0)$

$\Leftarrow$ falso

Contro esempio

$f(x) = |x|$ continua in $\mathbb{R}$

ma non derivabile in $x_0 = 0$

infatti

$$\lim_{h \to 0} \frac{|x+h| - |x|}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{|h|}{h} = \begin{cases} 1 & h \to 0^+ \\ -1 & h \to 0^- \end{cases}$$

$x = x_0 = 0$

$\Rightarrow f'_+(0) = 1$ e $f'_-(0) = -1 \Rightarrow f'(0)$ NON ESISTE

Derivate di funzioni elementari

$f(x) = \text{costante}$

$\Rightarrow f(x) - f(x_0) = 0 \Rightarrow f'(x_0) = 0 \quad \forall x_0$

$f(x) = x$

$\Rightarrow \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 1 \rightsquigarrow f'(x_0) = 1 \quad \forall x_0$

$f(x) = x^2$

$\Rightarrow f'(x) = \lim_{h \to 0} \dfrac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \dfrac{2xh + h^2}{h}$

$\Rightarrow f'(x) = 2x \quad \forall x$

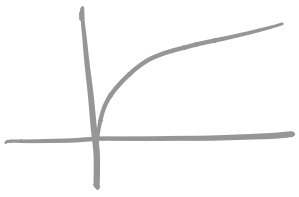
$f(x) = \sqrt{x} \qquad X = [0, +\infty)$

se $x \neq 0$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{h}{x} + o(h) - 1\right)}{h}$$

$$= \boxed{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = f'(x)$$



se $x = 0$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x} - 0}{x} = +\infty$$

in $x = 0$ grafico $\sqrt{x}$ ha tangente verticale

$f(x)=x^n \quad n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{x^n\left(1+n\frac{h}{x}+o\left(\frac{h}{x}\right)\right)}{h}$$

$$=nx^{n-1}$$

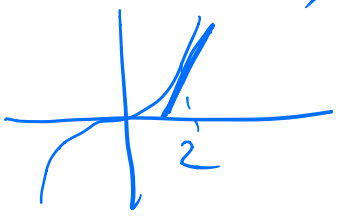
Es: $f(x)=x^3$ in $x_0=2$

$$f'(2)=3\cdot 2^2=12$$

Eq. della retta tg a x^3 in $x_0=2$ $\quad f(x_0)=8$

$$y=2^3+12(x-2)=8+12(x-2)$$

$$y=12x-16$$



$f(x)=x^\alpha \quad \alpha\in\mathbb{R} \quad x>0$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^\alpha-x^\alpha}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{x^\alpha\left(1+\frac{h}{x}\right)^\alpha-x^\alpha}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{x^\alpha\left(1+\frac{\alpha h}{x}+o\left(\frac{h}{x}\right)-1\right)}{h}=\alpha x^{\alpha-1}$$

se $\alpha>1$ f derivabile in $x\geq 0$ se $\alpha<1$ per $x>0$

$f(x) = \sin x \rightsquigarrow f'(x) = \cos x$

In fact

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin x \cosh + \cos x \sinh - \sin x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \sin x \underbrace{\frac{(\cosh - 1)}{h}}_{\downarrow h\to 0,\ 0} + \cos x \underbrace{\frac{\sinh}{h}}_{\downarrow h\to 0,\ 1}$$

$= \cos x$

$f(x) = \cos x \rightarrow f'(x) = -\sin x$

$f(x) = e^x \rightsquigarrow f'(x) = e^x$

$$\frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \frac{(e^h - 1)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} e^x$$

$f(x) = \lg x \rightsquigarrow f'(x) = \frac{1}{x} \quad x > 0$

$$\frac{\lg(x+h) - \lg(x)}{h} = \frac{\lg\left(x\left(1 + \frac{h}{x}\right)\right) - \lg x}{h}$$

$$= \frac{\lg\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} \frac{1}{x}$$

OSS: Se esistono finiti

$f'_+(x_0)$ e $f'_-(x_0)$

$\Downarrow$

f è derivabile in $x_0 \Leftrightarrow f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$
$=: f'(x_0)$

Se $f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = +\infty$
oppure
$f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = -\infty$ $\Rightarrow$ f ha tg. verticale in x_0

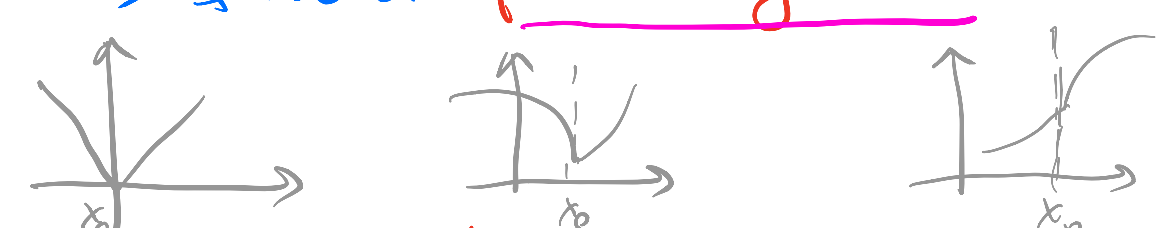
(questo anche se f è def. solo per $x \geq x_0$ o solo per $x \leq x_0$ e la der dx (risp. sn.) è $\pm\infty$)

se sono diversi? che punto è x_0?

Se f è continua in x_0, $f'_+(x_0) \neq f'_-(x_0)$

e uno dei due è finito

$\Rightarrow$ f ha un punto angoloso in x_0

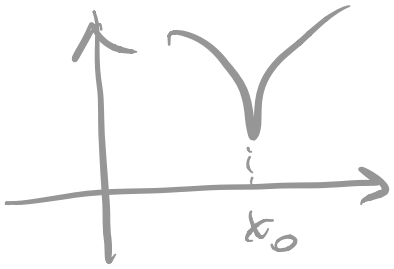


entrambi finiti | $f'_-(x_0) = -\infty$ | $f'_+(x_0) = +\infty$

Se f è continua in x_0 e se

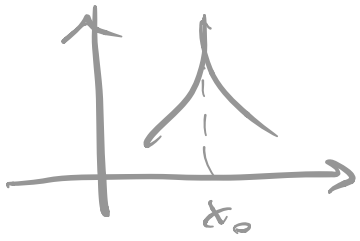
$f'_+(x_0) \neq f'_-(x_0)$ ed entrambi sono infiniti

$\Rightarrow$ f ha una CUSPIDE in x_0



$f'_-(x_0) = -\infty$

$f'_+(x_0) = +\infty$



$f'_-(x_0) = +\infty$

$f'_+(x_0) = -\infty$

(punti di non derivabilità di f)

Algebra delle derivate

Siano $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$
$x_0 \in (a,b)$ f, g derivabili in x_0

$\Downarrow$

$\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad (\alpha f)'(x_0) = \alpha f'(x_0)$

$$(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$$

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)\, g(x_0) + f(x_0)\, g'(x_0)$$

Infatti:

$$\frac{f(x_0+h)\, g(x_0+h) - f(x_0) g(x_0) \pm f(x_0+h)\, g(x_0)}{h}$$

$$= f(x_0+h)\, \frac{[g(x_0+h) - g(x_0)]}{h} + \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}\, g(x_0)$$

- $f(x_0+h) \to f(x_0)$ perché f è cont. in x_0
- $\frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} \to g'(x_0)$ per $h \to 0$
- $\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \to f'(x_0)$

$\Rightarrow$ ok

se $g(x_0) \neq 0$

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = \frac{-g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

Infatti $\dfrac{\frac{1}{g(x_0+h)} - \frac{1}{g(x_0)}}{h} = \frac{1}{h}\left[\dfrac{g(x_0) - g(x_0+h)}{g(x_0+h)\,g(x_0)}\right]$

$\downarrow$

$$-g'(x_0)\,\frac{1}{g^2(x_0)}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

Infatti $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \left(f \cdot \dfrac{1}{g}\right)'$

$$= f'(x_0)\left(\frac{1}{g}\right)(x_0) + f(x_0)\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0)$$

$$= \frac{f'(x_0)}{f(x_0)} - f(x_0)\,\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

$$(x^3 \cos x)' = 3x^2 \cos x + x^3(-\operatorname{sen} x)$$

$$\left(\frac{\cos x}{x^3}\right)' = \frac{(-\operatorname{sen} x)x^3 - 3x^2 \cos x}{x^6}$$

DERIVATA DI FUNZIONE COMPOSTA

Siano $f: I \to \mathbb{R}$ e $g: J \to \mathbb{R}$

$x_0 \in \mathring{I}$ e $f(x_0) \in \mathring{J}$

tali f derivabile in x_0 e g derivabile in $f(x_0)$

$$\Downarrow$$

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

!! Attenzione !!

Infatti

$$\frac{(g \circ f)(x_0+h) - (g \circ f)(x_0)}{h} =$$

$$= \frac{g(f(x_0+h)) - g(f(x_0))}{h} \cdot \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{f(x_0+h) - f(x_0)}$$

$$= \frac{g(f(x_0+h)) - g(f(x_0))}{f(x_0+h) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \to f'(x_0)$

perché $f(x_0+h) - f(x_0) \to 0$

g der. in $f(x_0)$ $\Rightarrow$ $\frac{g(f(x_0+h)) - g(f(x_0))}{f(x_0+h) - f(x_0)} \to g'(f(x_0))$

ES $f(x) = \sqrt{x^4+3x^2}$

$x \neq 0 \Rightarrow x^4+3x^2 \neq 0$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^4+3x^2}} (x^4+3x^2)'$$

$$= \frac{4x^3+6x}{2\sqrt{x^4+3x^2}}$$

se $x=0$ $\quad f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^4+3x^2}-0}{x}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{3}\,|x|\,(1+o(1))}{x}$$ NON ESISTE

$f(x) = \log(x^4+3x^2+1)$

$$f'(x) = \frac{1}{x^4+3x^2+1} \cdot (x^4+3x^2+1)'$$

$$= \frac{1}{x^4+3x^2+1}(4x^3+6x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$f(x) = x^x = e^{x \ln x}$$

$$f'(x) = e^{x \ln x} [x \ln x]' = e^{x \ln x} [\ln x + 1]$$

$$= x^x (\ln x + 1)$$

$$f(x) = x|x| = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = |x| + x \frac{x}{|x|} = 2|x| \qquad x \neq 0$$

$\lim_{x \to 0} f'(x) = 0$ ↑ stesso valore!

oss: $f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{h|h|}{h}$ $\lim_{h \to 0} |h| = 0$

Questo è un fatto generale:

le derivate di una funzione derivabile può avere solo discontinuità di II specie

1) se $\exists$ finito $\lim_{x \to x_0} f'(x)$

2) f è derivabile in x_0 e $= f'(x_0)$