

Lezioni del 12 e 14 novembre 2018

Docente: Alessandra Cutri

**Argomenti:** Definizione di continuità, classificazione delle discontinuità, esempi, discontinuità di funzioni monotone, proprietà fondamentali delle funzioni continue, teorema degli zeri (con dim.) e corollari (teorema dei valori intermedi, monotonia e invertibilità).

**Argomenti:** Continuità della funzione inversa  
Teorema di Weierstrass, esercizi

DEFINIZIONE DI CONTINUITA': Sia  $f: X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$x_0 \in X$ .

Se  $x_0$  è un punto isolato per  $f \Rightarrow f$  è continua  
in  $x_0$  (senza  
condizioni)

Se  $x_0$  è un punto di accumulazione per  $X$

Allora  $f$  è continua in  $x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

Così

$\forall \mathcal{U}$  di  $f(x_0) \exists \mathcal{V}_{x_0} : \forall x \in \mathcal{V}_{x_0} (x \neq x_0 \Rightarrow f(x) \in \mathcal{U})$

oss: la cond  $x \neq x_0$  non serve più perché  
naturalmente  $\mathcal{U}$  (essendo intorno di  $f(x_0)$ )  
contiene  $f(x_0)$ !

Tramite  $\Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} f \text{ continua in } x_0 \Leftrightarrow \\ \forall a_n \rightarrow x_0 \ a_n \in X \text{ si ha } f(a_n) \rightarrow f(x_0) \end{array} \right\}$

Così

$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) = f(\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n) = f(x_0)$

Esempio  $f(x) = \sqrt{\log(\cos x)}$

$X = \{2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$  sono tutti punti  
isolati  
 $f(x) = 0 \quad \forall x \in X$  ed è continua  
 $\forall x \in X$

Se  $x_0$  è punto di accum. destro per  $X$   
 $\Downarrow$

$f$  è continua in  $x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$

Se  $x_0 \in X$  è punto di accum. sinistro per  $X$

$\Downarrow$   
 $f$  è continua in  $x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$

Quasi se  $x_0 \in X$  è di accumulazione

$\Downarrow$   
 $f$  è continua in  $x_0 \Leftrightarrow$   
 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$

Se  $f, g$  sono continue in  $x_0$   
 $\Downarrow$

$f \pm g, f \cdot g, f/g$  (se  $g(x_0) \neq 0$ ),  $|f|, f_+, f_-$ ,  
 $\max\{f, g\}, \min\{f, g\}$  sono  
continue in  $x_0$

Se  $f$  è continua  $\forall x_0 \in X \Rightarrow f \in C(X)$

Composizione di funzioni continue

Se  $f$  è continua in  $x_0$  e  $g$  è continua in  $f(x_0)$

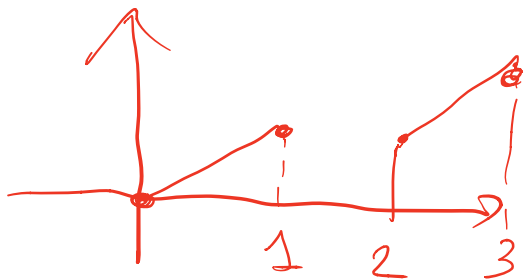
$\Rightarrow g \circ f$  è continua in  $x_0$

Esempio:

$f(x) = \frac{1}{x}$  è continua nel suo dominio naturale  $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$f(x) = \begin{cases} x & x \in [0, 1] \\ x-1 & x \in [2, 3] \end{cases}$$

$$X = [0, 1] \cup [2, 3]$$



$f$  è continua  
in  $X$

## Punti di DISCONTINUITA'

$$\text{Sia } f: X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x_0 \in X$$

t.c. f non è continua in  $x_0$

Classificazione delle discontinuità:

### 1 DISCONTINUITA' ELIMINABILE

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \quad \text{con } f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad 0 = f(0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1 \neq f(0)$$

$f$  ha una discontinuità eliminabile in  $x_0$  se

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \text{ ma } l \neq f(x_0)$$

$\Downarrow$

si può ridefinire  $f$  in  $x_0$  e renderla continua (ponendo  $f(x_0) = l$ )



## 2. DISCONTINUITA' DI I SPECIE (salto finito)

$$\text{se } \exists \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l \in \mathbb{R}$$

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = m \in \mathbb{R}$$

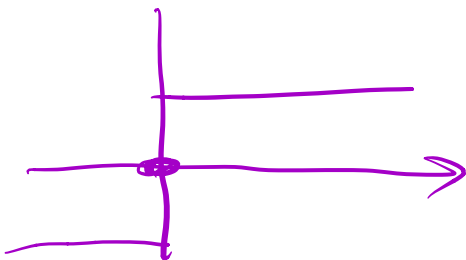
$$\text{me } l \neq m$$

$x_0$  discontinuita' di salto

$$S = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$$

↑ salto della funzione

Esempio  $f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$   $\text{con } x_0 = 0$

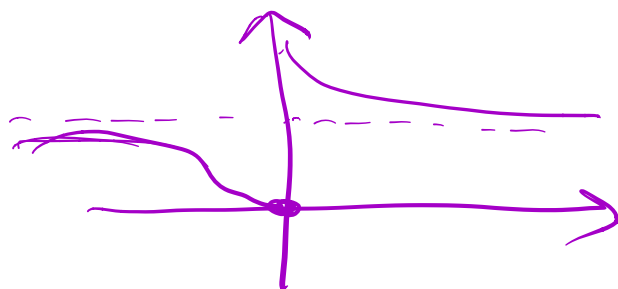


$x_0 = 0$  è una  
discontinuita'  
di salto

### 3. DISCONTINUITÀ DI II SPECIE

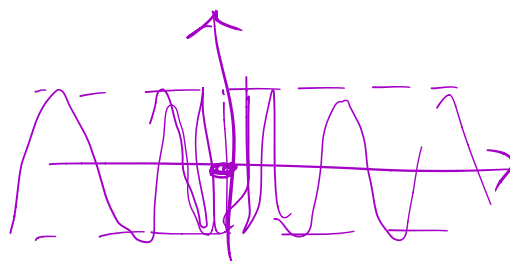
(tutt'al più con)

ES: salto infinito o non esistente

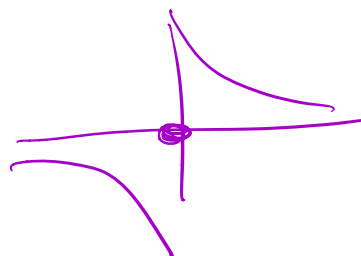


$$f(x) = \begin{cases} e^{1/x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

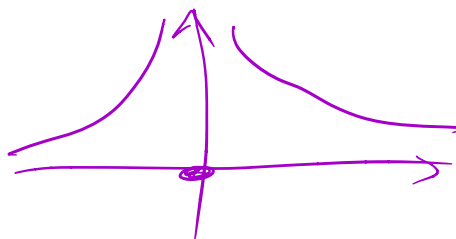
$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$



$$f(x) = \begin{cases} 1/x & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$



$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$



Oss: Esistono funzioni discontinue in tutti i punti del dominio

$$\underline{\text{Es}}: f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}$$

ha una discontinuità di II specie  
 $\forall x_0 \in \mathbb{R}$

FUNZIONE DI DIRICHLET

Si chiama anche funzione  
caratteristica dei razionali

## DISCONTINUITÀ DI FUNZIONI MONOTONE DEFINITE SU UN INTERVALLO

TEOREMA : Sia  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

monotona  $\Rightarrow f$  può avere in  
 $x_0 \in (a, b)$  (intorno ad  $(a, b)$ ) al più  
discontinuità di I specie e se

$x_0 = a$  o  $x_0 = b$  al più discontinuità  
eliminabile

Inoltre l'insieme dei punti di discontinuità  
di  $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  Intervallo  $\subseteq \mathbb{R}$   
funzione in  $I$  è al più NUMERABILE

Il teorema è conseguenza del teorema  
d'esistenza di limite destro e  
sinistro per funzioni monotone  
e per le sue caratterizzazioni  
Definizione  $x_0 \in (a, b)$

Definizione  $\Downarrow$   
A. Cusi 12/11/18  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = m$  e  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l$

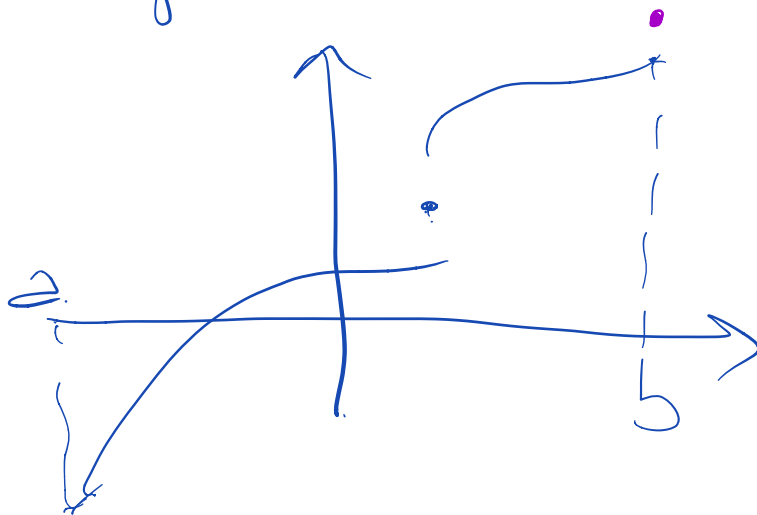
se  $l \neq m \Rightarrow x_0$  disc. di salto, se  $l = m$   
 $\Rightarrow f(x_0) = l = m \Rightarrow f$  è continua in  $x_0$

$\delta = x_0 = a$ , poiché  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l$  se

$l = f(a) \Rightarrow f$  è continua in  $a$  almeno se  
ha un salto, eliminabile

( $x = a$  è pto di acc. destro)

Analogamente per  $x = b$

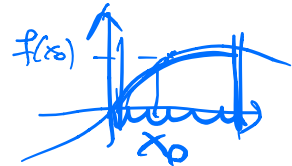


Permanente del segno: fra  $f$  continua  
in  $x_0$  e  $f(x_0) > 0$

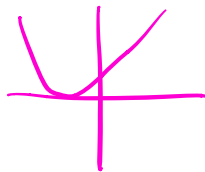
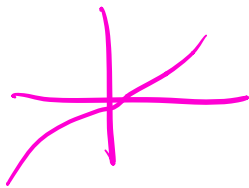


$\exists U_{x_0}$  intorno di  $x_0$  tale che

$$f(x) > 0 \quad \forall x \in X \cap U_{x_0}$$



Se  $f(x_0) = 0$  non si può dire nulla:



Analogamente se  $f(x_0) < 0$

$$\Rightarrow \Rightarrow U_{x_0} : f(x) < 0 \quad \forall x \in U_{x_0} \cap X$$

## TEOREMA DI ESISTENZA DEGLI ZERI

Sia  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua in  $[a, b]$

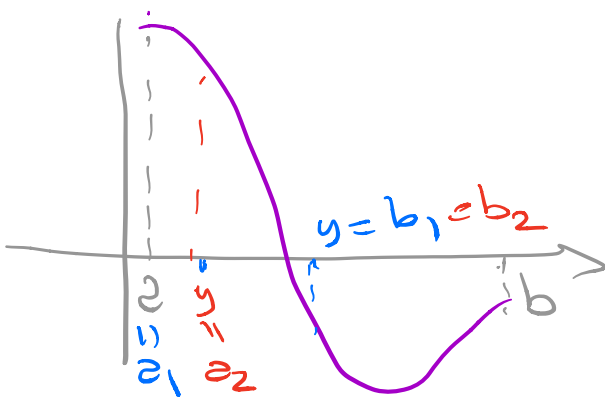
(attenzione dominio è un INTERVALLO

chiuso), se  $f(a) \cdot f(b) < 0$



$\exists c \in (a, b) : f(c) = 0$

Dim.: (metodo di bisezione) - Supp.  $f(a) > 0$   
e  $f(b) < 0$



$$y := \frac{a+b}{2}$$

se  $f(y) = 0 \Rightarrow y = c$   
fatto

se  $f(y) < 0 \Rightarrow a_1 = a, b_1 = y$

se  $f(y) > 0 \Rightarrow a_1 = y, b_1 = b$

$[a_1, b_1]$   $f(a_1) \cdot f(b_1) < 0$  e  $b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}$

Al passo  $n$  :  $[a_n, b_n]$   $f(a_n) \cdot f(b_n) < 0$

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \quad \forall n \geq 1$$

$$a \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n < b_n \leq b_{n-1} \leq b_{n-2} \leq \dots \leq b_1 \leq b$$

088

$\{a_n\}$  è limitata e crescente  
 $\Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \sup a_n$

$\{b_n\}$  è limitata e decrescente  
 $\Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \inf b_n$

Perché

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n =: c$$

$f$  continua

$$\Rightarrow f(a_n) \rightarrow f(c) \\ f(b_n) \rightarrow f(c)$$

$$\text{ma } f(a_n) \geq 0 \Rightarrow f(c) \geq 0$$

$$f(b_n) < 0 \Rightarrow f(c) \leq 0$$

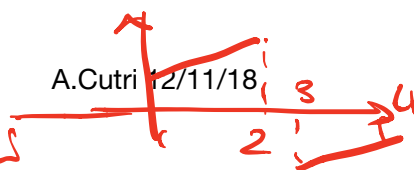
$$\Downarrow \\ f(c) = 0$$

~~ma~~

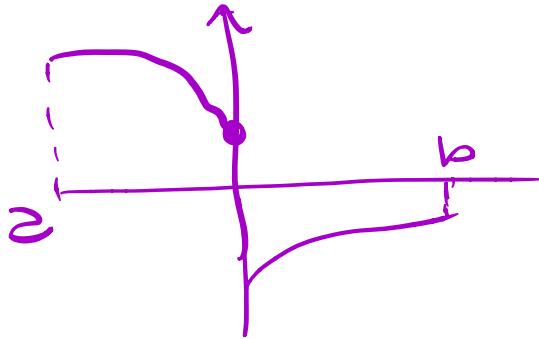
089: Importante che dominio sia  
un intervallo  $[a, b]$

$$X = [0, 1] \cup [2, 3]$$

~~f continua~~ ma non lo sarà



oss: Importante che  $f$  sia continua



$f$  non è cont.  
su  $[a, b]$  e  
non ha ter.

Concetto 1:  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

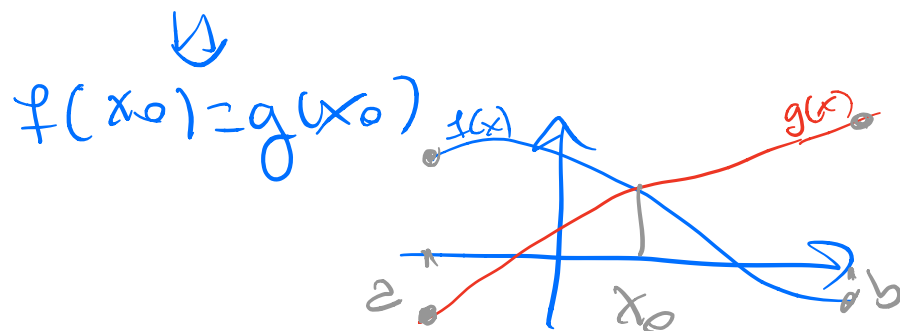
continue in  $[a, b]$  e t.c.

$$\left. \begin{array}{l} f(a) > g(a) \\ f(b) < g(b) \end{array} \right| \Rightarrow \exists x_0 \in (a, b) : f(x_0) = g(x_0)$$

Dim:  $h(x) := f(x) - g(x)$

$$\Rightarrow h \in C([a, b]) \quad h(a) > 0 \quad h(b) < 0$$

$$\exists x_0 \in (a, b) : \downarrow \text{T. degli zeri} \quad h(x_0) = 0$$



Condizione 2: Teorema dei valori intermedi

Sia  $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ( $I$  intervallo anche non limitato e anche non chiuso)

$f \in C(I)$ . Allora  $f$  assume tutti i valori compresi tra  $\inf_I f$  e  $\sup_I f$

Cioè:  $\forall y \in (\inf_I f, \sup_I f) \exists \bar{x} \in I:$

$$f(\bar{x}) = y$$

Dim: Sia  $g(x) := f(x) - y$

$\Rightarrow g \in C(I)$  inoltre, poiché

$$y > \inf_I f \quad (\text{per def. di } \inf_I f)$$

$$\exists a \in I : f(a) < y$$

$$\text{perché } y < \sup_I f \quad (\text{per def. di } \sup_I f)$$

$$\exists b \in I : y < f(b)$$

Quindi  $\exists a, b \in I:$

$$f(a) < y < f(b)$$

Se  $a < b$  considero l'intervallo  $[a, b]$

se  $b < a$  considero l'intervallo  $[b, a]$

e  $g(x) = f(x) - y$  su  $[a, b]$  ( $\circ [b, a]$ )

$g$  è continua, inoltre

$$g(a) < 0 \quad \text{e} \quad g(b) > 0$$

$$\exists \bar{x} \in (a, b): \quad \begin{array}{l} \hookrightarrow \text{T. degli zeri} \\ g(\bar{x}) = 0 \end{array}$$

$$\Downarrow$$

$f(\bar{x}) = y$

Quindi se  $I$  è intervallo e  
 $f \in C(I) \Rightarrow f(I)$  è intervallo

# Monotonia e invertibilità

(ulteriore applicazione del teorema  
deperter)

Abbiamo visto che una funzione  
strettamente monotona è  
invertibile ma che il viceversa  
è in generale falso:

ES

$f(x) = \frac{1}{x} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  è invertibile

$f^{-1}(x) = \frac{1}{x}$  ;  $f$  e  $f^{-1}$  sono

continue su  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  ma nessuna  
delle due è strettamente  
monotona su  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

OSS:  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  non è un intervallo

ES:  $f(x) = \begin{cases} x & x \in [0, 1) \end{cases}$

$\begin{cases} 3-x & x \in [1, 2) \end{cases}$

don  $f = [0, 2]$  ;  $f$  è invertibile



$f^{-1}(x) = f(x)$  non è st.  
monotona

OSS:  $f$  non è continua

Teorema (conseguenza Teorema)

Se  $I \subseteq \mathbb{R}$  un Intervallo

Se  $f \in C(I)$  e  $f$  invertibile in  $I$

$\Downarrow$   
 $f$  è strettamente monotona

Dim: Per assurdo supponiamo

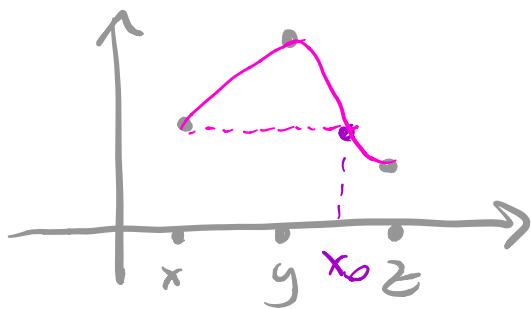
che  $f$  non sia strettamente

monotona  $\Rightarrow \exists x, y, z \in I$  t.c.

$$x < y < z$$

e, p.es.

$$f(y) > f(x) > f(z)$$



Perché  $f \in C(I)$

su  $[y, z]$  vale

T. dei valori intermedi

visto che  $f(y) > f(z)$

$$\text{e } f(x) \in [f(z), f(y)]$$

$$\Rightarrow \exists x_0 \in (y, z) : f(x_0) = f(x)$$

A.Cutri 12/11/18

$$\Downarrow$$
$$x_0 \neq x$$

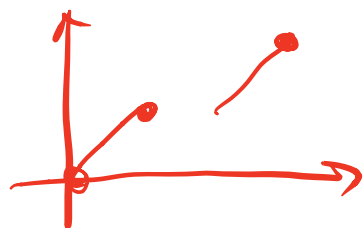
$\Rightarrow f$  non è iniettiva

$\Rightarrow f$  non è invertibile

Quindi  $f \in C(I) \rightarrow I$  intervallo  
 $\Downarrow$

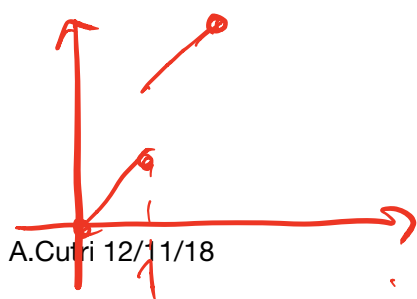
$f$  è invertibile  $\Leftrightarrow f$  è strettamente  
monotona

Sotto quali condizioni sufficienti  
l'inversa di una funzione continua  
è continua?  
in generale non è vero



$$f(x) = \begin{cases} x & x \in [0, 1] \\ x-1 & x \in (2, 3] \end{cases}$$
$$\text{dom } f = [0, 1] \cup (2, 3] =: X$$

$f \in C(X)$ ;  $f$  è invertibile in  $X$



A. Cutri 12/11/18

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} x & x \in [0, 1] \\ x+1 & x \in (1, 2] \end{cases}$$

$f^{-1}$  non è continua  
in  $[0, 2]$

oss:  $X$  non è intervallo,  $X$  non è chiuso

Teorema: Sia  $f: X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $f \in C(X)$  +  $f$  invertibile in  $X$

Allora  $f^{-1}$  è continua se

1)  $X$  è un intervallo  
oppure

2)  $X$  è un sottoinsieme chiuso  
e LIMITATO

di  $\mathbb{R}$  (cioè un sottoinsieme  
COMPATTO di  $\mathbb{R}$ )

Dim 1)

Sia  $X = I$  intervallo,  $f \in C(I)$ ,  
 $f$  invertibile in  $I \Rightarrow f$  è strettamente  
monotona

Proviamo che  $f^{-1}$  è continua in  $f(I)$ :

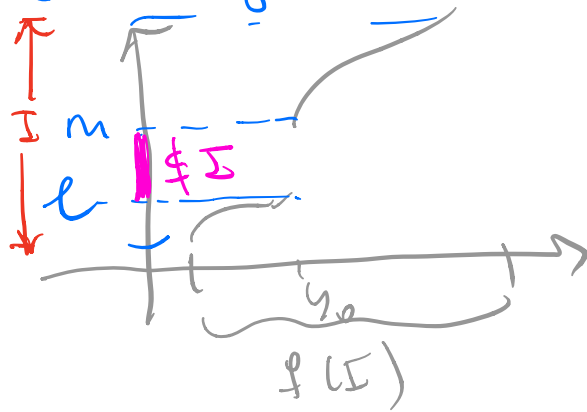
perché  $f$  str. monotona in  $I$

$\Rightarrow f^{-1}$  str. monotona su  $f(I)$

Per  $f(I)$  è un intervallo per il

T. dei valori intermedi (perché  $I$  è  
int. e  $f \in C(I)$ )

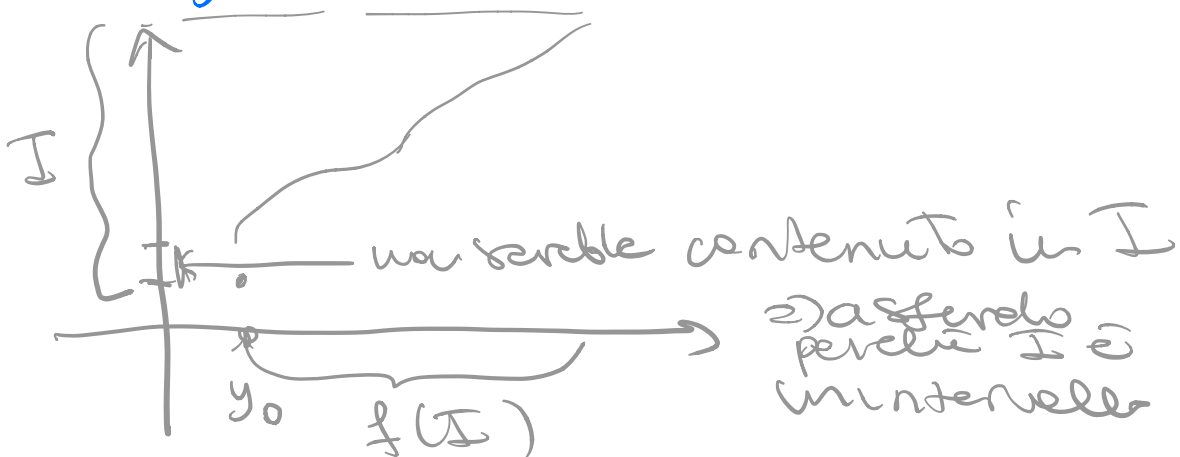
Mostrare  $f^{-1}$  strettamente all'interno  
 trovato  $f(I)$  per arco  
 all'interno di  $f(I)$  solo discontinuità  
 di  $I$  specie



$$\text{Se } y_0 \in f(I) \\ \exists \text{ finit } \lim_{y \rightarrow y_0^-} f^{-1}(y) = l$$

$$\lim_{y \rightarrow y_0^+} f^{-1}(y) = m$$

Se fossero  $l \neq m \Rightarrow$  ogni  $x \in (l, m)$   
 non sarebbe in  $I$  che è l'immagine  
 di  $f(I)$  tramite  $f^{-1} \Rightarrow I$  non  
 sarebbe un intervallo  $\Rightarrow$  assurdo  
 $\Rightarrow l = m \Rightarrow f^{-1}$  è continua in  $y_0$   
 Analogamente se  $y_0 \in \partial f(I)$



Conseguenze:

$$f(x) = \arcsin x$$

$$f(x) = \arccos x$$

$$f(x) = \operatorname{arctg} x$$

Senso funzioni continue perché sono  
inverse di funzioni continue definite  
su intervalli

De terminare vale anche se  $\text{dom} f$   
è un sottoinsieme COMPATTO di  $\mathbb{R}$ !

$K \subseteq \mathbb{R}$  è compatto  $\Leftrightarrow \forall \{x_n\} \subseteq K$

$\exists \{x_{k_n}\}$  successione di  $x_n$

B.-c.  $x_{k_n} \rightarrow x_0 \in K$

$K \subseteq \mathbb{R}$  è compatto  $\Leftrightarrow K$  è CHIUSO  
e LIMITATO

## Teorema di Weierstrass

Sia  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$   $f \in C([a, b])$

Allora

1)  $f$  è limitata su  $[a, b]$

2)  $\exists M = \max_{[a, b]} f$  e  $m = \min_{[a, b]} f$

3)  $f([a, b]) = [m, M]$

oss:

Vale anche per  $f \in C(K)$   $K$  compatto  
 $\Rightarrow$  1) e 2)

oss: la tesi 3) è conseguenza del  
fatto che  $[a, b]$  è un intervallo  
 $f \in C([a, b]) \Rightarrow f([a, b])$  è un intervallo

1)  $\inf_{[a, b]} f$  e  $\sup_{[a, b]} f$  sono attained

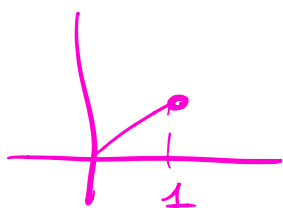
2)  $[a, b]$

$\Rightarrow f([a, b]) = [m, M]$

oss sulle ipotesi:  $[a, b]$  chiuso e  
limitato +  $f$  continua sono ipotesi essenziali  
per la tesi

Controesempio:

Se l'intervallo non è chiuso  
 $f: (0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = x \quad f \in C((0, 1])$



non è chiuso  
 non è assurto  
 $\Rightarrow$  non min

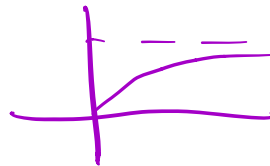
$f: (0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{1}{x} \in C((0, 1])$

non è limitata

Se l'intervallo non è limitato

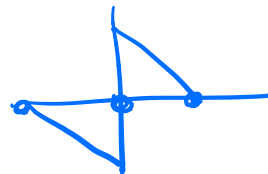
$f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = x$  non è  
 chiuso  
 limitato  
 $f \in C([0, +\infty))$

$f(x) = \arctan x \in C([0, +\infty))$  non ha max

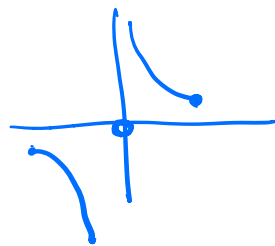


Se f non è continua:

$f(x) = x + \sin x$  in  $[-1, 1]$   
non ha min né max



$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [-1, 1] \setminus \{0\} \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$



f non è limitata

A.Cutri 14/11/18

Dir T. Weierstrass : Si deve provare che

$f([a, b])$  è compatto  $(\Rightarrow f([a, b])$  limitato  
 cioè  $f$  è limitata  
 e  $f([a, b])$  chiuso  
 $\Rightarrow \exists$  max e min  $f$  )

Se  $y_k \in f([a, b])$

$\Rightarrow \exists x_k \in [a, b] : f(x_k) = y_k$   
 Ma  $[a, b]$  è compatto

$\Rightarrow$  da  $\{x_k\}$  si può estrarre sottoseq.  
 $\{x_{k_n}\}$  t.c.  $x_{k_n} \rightarrow x_0 \in [a, b]$

Ma  $f$  è continua  $\Rightarrow f(x_{k_n}) \rightarrow f(x_0)$

inoltre  $\{f(x_{k_n})\}$  è una sottoseq. di  $y_k$

$\Rightarrow y_{k_n} \rightarrow f(x_0) \in f([a, b]) \Rightarrow f([a, b])$   
 è compatto

ma  $f([a,b])$  è un intervallo

"  
 $(\inf_{[a,b]} f, \sup_{[a,b]} f)$  ed essendo chiuso  
 $\Downarrow$

gli estremi sono  
assunti

$$\Rightarrow f([a,b]) = \left[ \min_{[a,b]} f, \max_{[a,b]} f \right] \quad \text{Q.E.D.}$$