

Lezioni del 07 e 08 novembre 2018

Docente: Alessandra Cutri

Argomenti: estremo superiore e inferiore di funzioni, esistenza del limite di funzioni monotone (dim.), continuità di funzioni elementari, asintoti orizzontale, verticale, obliquo, esempi, infinitesimi/infiniti ordine di infinitesimo/infinito.

Argomenti: esercizi su asintoti, limiti notevoli, esercizi su limiti, ordini di infinito/infinitesimo.

ESTREMO SUPERIORE e INFERIORE DI FUNZIONI

Sia $f: X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $A \subseteq X$ $A \neq \emptyset$

$$\inf_A f := \inf \{ f(x) : x \in A \}$$
$$= \inf f(A)$$

(estremo inferiore dell'insieme
 $f(A)$)

Se $\exists x_0 \in A : f(x_0) = \inf_A f$

$\Rightarrow f$ ha un minimo assoluto in A
($f(x_0)$) e x_0 è punto di minimo
assoluto (globale) di f in A

Analogamente

$$\sup_A f := \sup \{ f(x) : x \in A \}$$
$$= \sup f(A) \quad (\text{estremo sup. di } f(A))$$

Se $\exists x_1 \in A : f(x_1) = \sup_A f \leftarrow$ massimo
di f in A
 x_1 pto di massimo
assoluto in A

Se f non è limitata superiormente
in $A \Rightarrow \sup_A f = +\infty$

Se f non è limitata inferiormente
in $A \Rightarrow \inf_A f = -\infty$

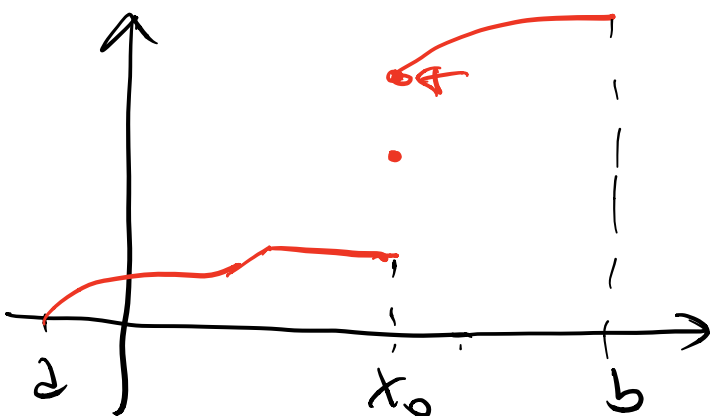
Esistenza del limite per funzioni monotone:

Sia $f: X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ monotona e

① Sia $x_0 \in \mathbb{R}^*$ punto di accumulazione destro per X

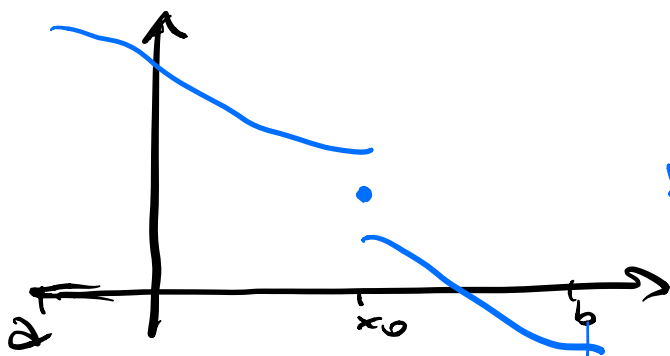
$$\Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \inf_{x \in X \cap (x_0, +\infty)} f(x) \quad (*)$$

$$(\text{se } f \text{ è } \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \sup_{x \in X \cap (x_0, +\infty)} f(x))$$



$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \inf_{x \in (x_0, b)} f(x)$$

$$\text{se } X \subseteq (a, b)$$



$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \sup_{x \in (x_0, b)} f(x)$$

A.Cutri 7/11/18

$$\text{se } X \subseteq (a, b)$$

② Sia $x_0 \in \mathbb{R}^*$ punto di accumulazione
 in sinistra per X

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \sup_{x \in X \cap (-\infty, x_0)} f(x)$$

$$(\text{se } f \downarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \inf_{x \in X \cap (-\infty, x_0)} f(x))$$

Quindi se x_0 è punto di accumulazione
 da dx e sin per X

$$\Downarrow$$

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \text{ ed } \exists \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$$

Dim di (*) : Quindi supponiamo
 f monotone crescente.

Dobbiamo provare che

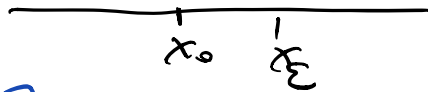
$$l := \inf_{X \cap (x_0, +\infty)} f \quad \text{è ie} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$$

Ci sono 2 casi

1° caso $l \in \mathbb{R}$ - Per le proprietà
 $\Leftrightarrow$ dell'inf

$$l \leq f(x) \quad \forall x \in X \cap (x_0, +\infty)$$

$$\text{e } \forall \varepsilon > 0 \quad \exists x_\varepsilon \in X \cap (x_0, +\infty) : f(x_\varepsilon) < l + \varepsilon$$



$$\begin{aligned} \text{Poiché } f \uparrow &\Rightarrow \forall x \in (x_0, x_\varepsilon) \cap X \quad f(x) \leq f(x_\varepsilon) \\ &\Rightarrow \underline{l} < l \leq f(x) \leq f(x_\varepsilon) < \underline{l + \varepsilon} \end{aligned}$$

$$\text{e } \delta = d(x_\varepsilon, x_0) = x_\varepsilon - x_0 \Rightarrow \forall x \in (x_0, x_0 + \delta) \cap X$$

$$|f(x) - l| < \varepsilon \Rightarrow f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0^+} l$$

2° caso $l = -\infty$

$\Rightarrow f$ non è limitata superiormente
su $X \cap (x_0, +\infty)$

$\Downarrow$
 $\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists x_n \in X \cap (x_0, +\infty) \text{ t.c.}$

$$f(x_n) < M$$

Perché $f \nearrow$: $\forall x < x_n \Rightarrow f(x) \leq f(x_n) < M$
 $x \in X$



Se $\delta = x_n - x_0 \Rightarrow \forall x \in X \cap (x_0, \underbrace{x_0 + \delta}_{x_n})$

$$f(x) < M$$

$\Downarrow$

$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty$ c.v.d.

(dimostrare per esercizio ge altmcoa)

Applicazioni : continuità di funzioni
elementari :

Se $a > 1 \Rightarrow x \mapsto a^x \nearrow \forall x \in \mathbb{R}$

$$\forall x_0 \in \mathbb{R} \quad \Downarrow$$

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0^+} a^x = \inf_{(x_0, +\infty)} a^x = a^{x_0}$$

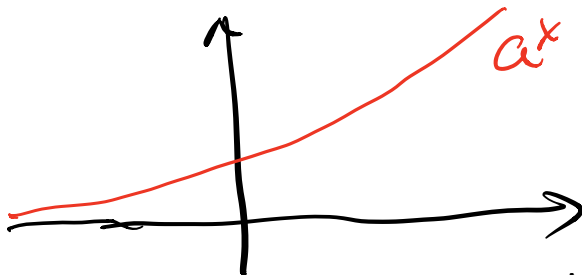
$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} a^x = \sup_{(-\infty, x_0)} a^x = a^{x_0}$$

$\Downarrow$

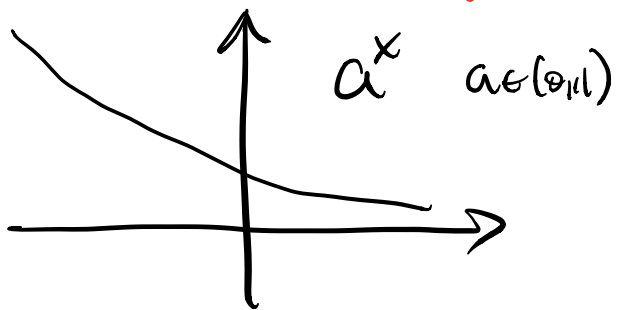
$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} a^x = a^{x_0} \Rightarrow a^x \text{ è continua in } x_0 \forall x_0 \in \mathbb{R}$$

$$\text{Inoltre } a^x \rightarrow +\infty \text{ as } x \rightarrow +\infty$$

$$e \quad a^x \rightarrow 0 \text{ as } x \rightarrow -\infty$$

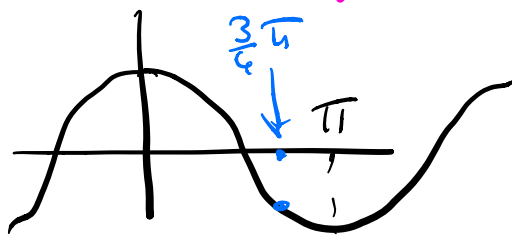


se $a \in (0,1)$ a^x è $\searrow$ e si ragiona
analogamente



In modo analogo si dimostra
le continue in tutto il suo
dominio di $f(x) = \log_a x$

DS1: Il teorema vale anche a
funzioni monotone definite su
per $x \rightarrow x_0^+$ o per $x \rightarrow x_0^-$ assicurando
l'esistenza del limite dx/m .
per esempio: $f(x) = \cos x$



$x_0 \neq k\pi \Rightarrow \cos x$ è
def. monotone per $x \rightarrow x_0$

$$x \rightarrow \left(\frac{3\pi}{4}\right)^+ \quad \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}^+} \cos x = \sup_{x \in (\frac{3\pi}{4}, \pi)} \cos x$$

$$= \cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x \rightarrow \left(\frac{3\pi}{4}\right)^- \quad \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}^-} \cos x = \inf_{x \in (0, \frac{3\pi}{4})} \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\Rightarrow$ cont. in $\frac{3\pi}{4}$

$$\text{se } x \in K\bar{u} \quad K=0 \Rightarrow x \geq 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \cos x = \sup_{(0, \bar{u})} \cos x = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \cos x = \sup_{(-\bar{u}, 0)} \cos x = 1$$

$\Rightarrow$ analogamente in $x \in K\bar{u} \quad K \neq 0$

$$\Rightarrow \forall x_0 \in \mathbb{R} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \cos x = \cos x_0$$

$x \mapsto \cos x$ è continua in $\mathbb{R}$

Analogamente $x \mapsto \sin x$ è
continua

$$\text{tip } x \mapsto \frac{\sin x}{\cos x} \text{ è continua } \forall x_0 \neq \pm \frac{\pi}{2}$$

Valc per le funzioni definitivamente
monotone

Si applica anche alle funzioni
inversee! se f è stric. monotone
 $\Rightarrow f^{-1}$ è stric. monotone

etc.

Teorema: le funzioni sottoelencate sono continue in tutto il loro dominio naturale:

$$f(x) = x^2 \quad x \in \mathbb{R}$$

$$f(x) = a^x \quad a > 0$$

$$f(x) = \log_a x \quad a > 0 \quad a \neq 1$$

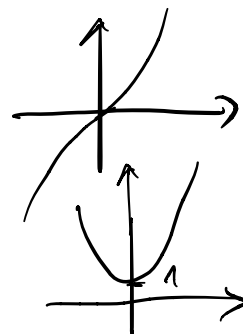
$f(x)$: funzioni Trigonometriche

$f(x)$: funzioni Trigonometriche inverse

$f(x)$: funzioni Iperboliche:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$



$f(x)$: funzioni razionali

Teorema: (Composizione di funzioni composte)

$$f: X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(X) \subseteq Y$$

$$g: Y \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

Se $x_0 \in X$, f è continua in x_0 e g è continua in $f(x_0)$

$\Downarrow$

$g \circ f$ è continua in x_0

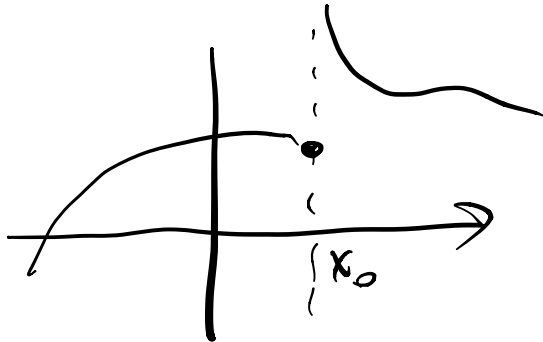
ASINTOTI VERTICALI ! Sia $f: X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ punto di accumulazione
di X e/o numero per X

Se almeno uno dei due limiti:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \pm \infty \text{ e/o } \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \pm \infty$$

$x = x_0$ è $\Downarrow$ asintoto verticale per f



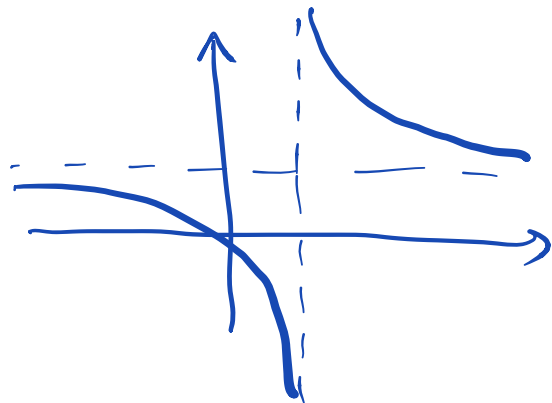
$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{x-1} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{x-1} = -\infty$$

$\Rightarrow x = 1$ asintoto
verticale

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty$$

$\Rightarrow x = x_0$
asintoto verticale



oss : $\frac{x}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1}$

ASINTOTI ORIZZONTALI : $f: X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Se $+\infty$ è punto di accumulazione
per X (cioè f è definita in un intorno
di $+\infty$)

e se $\exists l \in \mathbb{R} : \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l$

$\Rightarrow y = l$ asintoto orizzontale
di f a $+\infty$

Se $-\infty$ è punto di accumulazione per X

e se $\exists m \in \mathbb{R} : \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = m$

$\Rightarrow y = m$ asintoto orizzontale
di f a $-\infty$

Nell'esempio precedente $f(x) = \frac{x}{x-1}$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

$\Rightarrow y = 1$ asintoto orizzontale
sia a $+\infty$ che a $-\infty$

ASINTOTI OBLIQUI

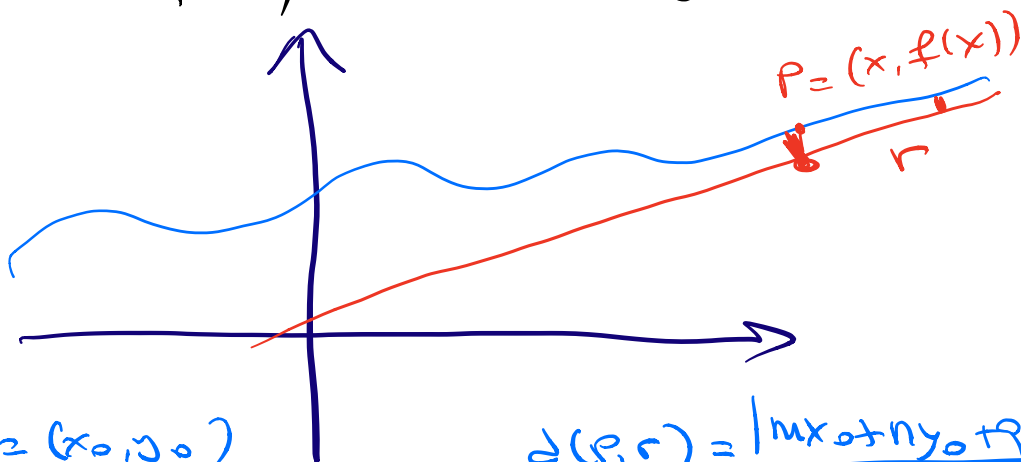
Se $f(x) \rightarrow \pm \infty$ per $x \rightarrow \pm \infty$

cioè se non ammette asintoto orizzontale, potrebbe ammettere asintoto obliquo cioè potrebbe esistere una retta

r di eq. $y = ax + b$ t.c.

$$d(\text{graph } f, r) \xrightarrow{x \rightarrow \pm \infty} 0 \text{ per } x \rightarrow \pm \infty$$

" $(x, f(x))$



$$P = (x_0, y_0)$$

$$r: mx + ny + q = 0$$

$$d(P, r) = \frac{|mx_0 + ny_0 + q|}{\sqrt{m^2 + n^2}}$$

Se $n=1, m=-a, q=-b$
 $x_0 = x, y_0 = f(x)$

$$d(P, r) = \frac{|f(x) - ax - b|}{\sqrt{a^2 + 1}} \rightarrow 0 \Rightarrow f(x) = ax + b + o(1)$$

Quindi f ammette asintoto
obliquo di eq. $y = ax + b$
per $x \rightarrow +\infty$ e
(per $x \rightarrow -\infty$)

$$f(x) = ax + b + o(1) \text{ per } x \rightarrow +\infty \quad (**)$$

(analogamente
 $f(x) = ax + b + o(1) \text{ per } x \rightarrow -\infty$)

(**) equivale a

$$\frac{f(x)}{x} \rightarrow a \quad x \rightarrow +\infty$$

$$\text{e} \quad f(x) - ax \rightarrow b \quad \text{per } x \rightarrow +\infty$$

(analogamente per $x \rightarrow -\infty$)

OSS : provare direttamente (**)
 è più facile !!

$$\underline{\text{ES}}: f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$$

$$X = \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$$

Esistono asintoti obliqui?

$$\sqrt{x^2 + 1} = |x| \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}$$

$$\text{per } x \rightarrow +\infty \Rightarrow \underset{\substack{\uparrow \\ |x| \approx x}}{x} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = x \left(1 + \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right)$$

$\frac{1}{x^2} \rightarrow 0$
 $x^2 \rightarrow +\infty$

$$= x + \underbrace{\frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)}_{o(1) \text{ } x \rightarrow +\infty}$$

$$\Rightarrow f(x) = x + o(1) \quad x \rightarrow +\infty$$

$\Rightarrow y = x$ asintoto obliquo a $+\infty$

$$\text{per } x \rightarrow -\infty \quad \sqrt{x^2 + 1} = -x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = -x \left(1 + \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right)$$

$$= -x + \underbrace{\frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)}_{o(1) \text{ } x \rightarrow -\infty}$$

$$\Rightarrow f(x) = -x + o(1) \quad x \rightarrow -\infty$$

$\Rightarrow y = -x$ asintoto obliquo a $-\infty$

Attenzione:

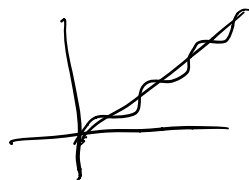
$$f(x) = x + \sin x$$

$$X = \mathbb{R}$$

$$f(x) \rightarrow +\infty \quad \text{se } x \rightarrow +\infty$$

$$f(x) \rightarrow -\infty \quad \text{se } x \rightarrow -\infty$$

ha asintoto obliquo?



$$f(x) = x \left(1 + \frac{\sin x}{x} \right) = x (1 + o(1))$$

$x \rightarrow \pm\infty$

$\downarrow$ $x \rightarrow \pm\infty$

0

$$\text{Ma } x(1+o(1)) \neq x + o(1)$$

Perché $x o(1)$ è una forma
indeterminata
se $x \rightarrow \pm\infty$!!

In tal caso $x o(1)$ è $\approx \sin x$
che non ha limite
per $x \rightarrow \pm\infty$

2) L'asintoto obliquo non esiste
 $\Leftrightarrow$ $\frac{f(x)}{x} \rightarrow 1$ ma $f(x) - x = \sin x$
non ha limite

ES:

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 5x} \quad X = (-\infty, 0] \cup [5, +\infty)$$

$$x \rightarrow \pm\infty \quad f(x) \rightarrow +\infty$$

$$\sqrt{x^2 - 5x} = \sqrt{x^2 \left(1 - \frac{5}{x}\right)} = |x| \sqrt{1 - \frac{5}{x}}$$

$$\begin{aligned} \text{per } x \rightarrow +\infty &= x(1 + o(1)) \\ &= x + x o(1) \\ &\quad \text{forma indet.} \end{aligned}$$

$$\frac{f(x)}{x} = 1 + o(1) \rightarrow 1 = a$$

$$g(x) - ax = f(x) - x = x \sqrt{1 - \frac{5}{x}} - x$$

$$= x(x + o(1)) - x = x o(1) \\ \text{f. indet.}$$

no

$$\begin{aligned} x \sqrt{1 - \frac{5}{x}} - x &= x \left(1 - \frac{5}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) - x \\ &= -\frac{5}{2} + o(1) \end{aligned}$$

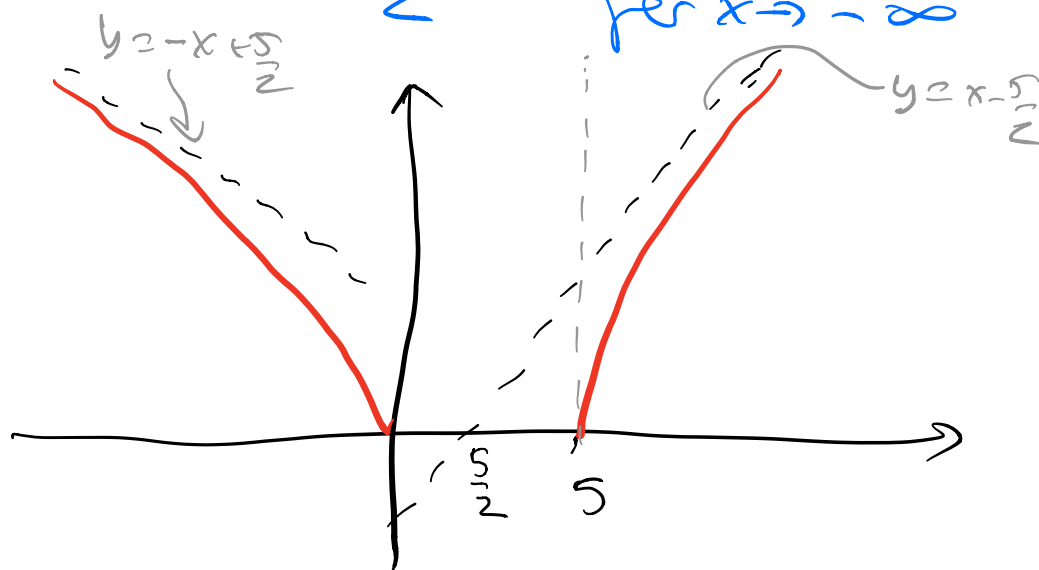
$$\Rightarrow y = x - \frac{5}{2}$$

asintoto obliquo
per $x \rightarrow +\infty$

Per $x \rightarrow -\infty$

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2 - 5x} &= |x| \sqrt{1 - \frac{5}{x}} \geq -x \sqrt{1 - \frac{5}{x}} \\ &= -x \left(1 - \frac{5}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) \\ &= -x + \frac{5}{2} + o(1) \quad x \rightarrow -\infty\end{aligned}$$

$\Rightarrow y = -x + \frac{5}{2}$ asintoto obliquo
per $x \rightarrow -\infty$



Esercizi per domani: dominio e asintoti di

$$f(x) = (x+5) \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$$

$$f(x) = \lg(e^x + 2e^{-x})$$

INFINITESIMI / INFINITI / ORDINE

Siano f, g definite in un intorno di x_0 .

Supponiamo che per $x \rightarrow x_0$

$$\begin{array}{ll} f(x) = o(1) & \text{così come} \\ g(x) = o(1) & \text{infinitesime} \end{array}$$

re

$$\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow \begin{cases} 0 \Rightarrow f(x) = o(g(x)) & \text{f infinitesimo di ordine sup. a g} \\ \pm \infty \Rightarrow g = o(f) & \text{f infinitesimo di ordine inferiore a g} \end{cases}$$

$$\text{se } \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \leq M \Rightarrow f(x) = O(g(x))$$

ES

$$\begin{array}{ll} x^2 = o(x) & x \rightarrow 0 \\ x = o(x^{1/2}) & x \rightarrow 0^+ \end{array}$$

Se per $x \rightarrow x_0$

$$f \rightarrow \pm \infty$$

$$g \rightarrow \pm \infty$$

se $\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow 0 \Rightarrow f = o(g)$
 f è un infinito di ordine inferiore a g

se $\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow \pm \infty \Rightarrow g = o(f)$
 f è infinito di ordine superiore a g

se $\left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \leq M \Rightarrow f = O(g)$

$$\underline{\underline{ES}} \quad \frac{1}{\sqrt{x}} = o\left(\frac{1}{x}\right) \quad x \rightarrow 0^+$$

$$\sin x = O(x) \quad x \rightarrow 0$$

$$\sin x = o(x^{1/2}) \quad x \rightarrow 0^+$$

$$x^2 = o(\sin x) \quad x \rightarrow 0$$

$$1 - \cos x = o(\sin x) \quad x \rightarrow 0$$

$$\lg(1+e^x) = O(x) \quad x \rightarrow +\infty$$

$$\sqrt{x} = o(\lg(1+e^x)) \quad x \rightarrow +\infty$$

$$(\lg x)^3 = o(\sqrt{x}) \quad x \rightarrow +\infty$$

↪ attenzione!

ORDINE DI INFINITESIMO :

Prendi f, g $o(1)$ per $x \rightarrow x_0$
 e sia $g(x) > 0$ definitivamente per $x \rightarrow x_0$
 se $\exists \alpha > 0, \epsilon \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0$ t.c.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{(g(x))^\alpha} = \epsilon$$

$\Rightarrow f$ è un infinitesimo di ordine α
 rispetto a $g(x)$

In genere si prende come
 infinitesimo anyone

$$g(x) = |x - x_0| \quad \text{per } x \rightarrow x_0$$

$$\bullet \quad g(x) = x - x_0 \quad \text{se } x \rightarrow x_0^+$$

$$\bullet \quad g(x) = x_0 - x \quad \text{per } x \rightarrow x_0^-$$

ORDINE DI INFINITO

Se $f, g \rightarrow \infty$ per $x \rightarrow x_0$ e
 $g(x) > 0$ definitivamente per $x \rightarrow x_0$

Se $\exists \beta > 0$ e $l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{(g(x))^\beta} = l$$

$\Rightarrow f$ è un infinitesimo d'ordine β rispetto
a $g(x)$

In genere si prende come infinitesimo
riferimento per $x \rightarrow x_0$

$$g(x) < \frac{1}{|x - x_0|} \quad x \rightarrow x_0$$

$$g(x) < \frac{1}{x - x_0} \quad x \rightarrow x_0^+$$

$$g(x) < \frac{1}{x_0 - x} \quad x \rightarrow x_0^-$$

oss: non è detto che tale ordine esista

p.es. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x}{(\frac{1}{x})^\alpha} = 0 \quad \forall \alpha > 0$
Non c'è ordine di infinito

Se $f(x)$ è un infinitesimo di ordine

n per $x \rightarrow x_0$

$$\Rightarrow f(x) = L |x - x_0|^n (1 + o(1))$$

per qualche $L \in \mathbb{R}, L \neq 0$ $x \rightarrow x_0$

e viceversa

Per esempio

$$\text{Se } x \approx x (1 + o(1)) \quad x \rightarrow 0$$

$\Rightarrow x \approx x$ è un infinitesimo di ordine
1 per $x \rightarrow 0$

$$\cos x - 1 = -\frac{1}{2}x^2 (1 + o(1)) \quad \text{ha ordine di infinitesimo 2}$$

$$e^x - e^3 = e^3 (e^{x-3} - 1) = e^3 (x-3) (1 + o(1))$$

$x \rightarrow 3$ ha ordine di infinitesimo 1 per $x \rightarrow 3$

ES: $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ dominio e
dominio

$$\text{dom } f = \left\{ x \neq 0 : \frac{x+1}{x} > 0 \right\} = (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \Rightarrow y = e$$

asintoto
orizzontale a
 $+\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = ?$

e infatti

$x \rightarrow -\infty \Rightarrow y := -x \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{y}\right)^{-y} \\ &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{y-1}{y}\right)^{-y} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{y-1+1}{y-1}\right)^y = \\ &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{y-1}\right)^{y-1+1} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{y-1}\right)^{y-1} \left(1 + \frac{1}{y-1}\right) \\ &\quad \downarrow \qquad \qquad \downarrow \\ &\quad e \qquad \qquad 1 \end{aligned}$$

A.Cutri 8/11/18

$y = e$ asintoto orizzontale $\Rightarrow e$ anche a $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \log\left(1 + \frac{1}{x}\right)}$$

$$x \log\left(1 + \frac{1}{x}\right) = x \log\left[\frac{1}{x}(1+x)\right] = x \log \frac{1}{x} + x \log(1+x)$$

$$f(x) = e^{x \log \frac{1}{x} + x \log(1+x)}$$

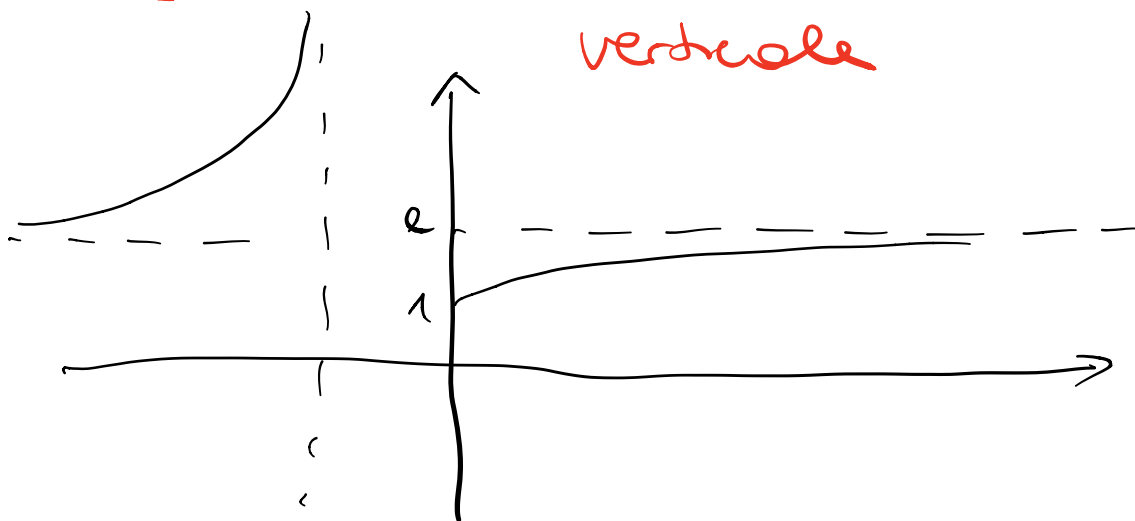
$$= e^{-x \log x + x^2 + o(x^2)} \quad x \rightarrow 0^+$$

$$x \log x \rightarrow 0 \quad \text{for } x \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow f(x) = 1 + o(1) \quad \text{for } x \rightarrow 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty$$

$x = -1$ asymptote
verticale



Spesso è utile osservare che:

$$\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \begin{cases} \pi/2 & x > 0 \\ -\pi/2 & x < 0 \end{cases}$$

Inoltre se $x > 0$ proviamo che

$$\arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} - \arctan x :$$

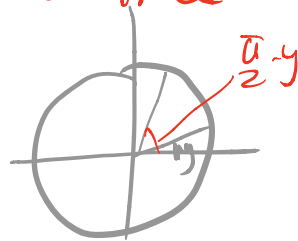
$$y := \arctan \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{1}{x} = \tan y$$

$$\text{se } x > 0 \Rightarrow y > 0 \Rightarrow 0 < y < \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{\tan y} = \tan\left(\frac{\pi}{2} - y\right) \Rightarrow 0 < \frac{\pi}{2} - y < \frac{\pi}{2}$$

$\Rightarrow$ $\frac{\pi}{2} - y$ è un'angolo

$$\frac{\cos y}{\sin y} = \frac{\sin(\frac{\pi}{2} - y)}{\cos(\frac{\pi}{2} - y)}$$



$$\Rightarrow \frac{\pi}{2} - y = \arctan x$$

$$\Rightarrow \arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{se } x < 0 \Rightarrow -x > 0$$

$$\Rightarrow \arctan\left(\frac{1}{-x}\right) = \frac{\pi}{2} - \arctan(-x) \Rightarrow -\arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} + \arctan x$$

$\Rightarrow \arctan \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2} - \arctan x$

$$\underline{\text{ES}}: f(x) = x^{\arctan x} \quad x \rightarrow +\infty$$

che ordine di infinito?

$$\begin{aligned} x^{\arctan x} &= e^{\arctan x \lg x} \\ &= e^{(\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{x}) \lg x} \\ &= e^{\frac{\pi}{2} \lg x - (\arctan \frac{1}{x}) \lg x} \quad (x \gg 1) \end{aligned}$$

ma per $x \rightarrow +\infty \quad \arctan \frac{1}{x} = \frac{1}{x} (1+o(1))$

Perché $\boxed{\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\arctan y}{y} = 1}$ *infatti*

$x = \arctan y \Rightarrow y = \tan x \quad e \quad x \rightarrow 0$

$$\frac{x}{\tan x} = \frac{x}{\sin x} \cos x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$$

quindi $\boxed{\arctan y = y + o(y) \quad y \rightarrow 0}$

$\Rightarrow$ per $x \rightarrow +\infty \quad \frac{1}{x} \rightarrow 0 \Rightarrow \arctan \frac{1}{x} = \frac{1}{x} (1+o(1))$

$$e(x) = e^{\lg x^{1/2} - \frac{1}{x} \lg x (1+o(1))}$$

A.Cutri 8/11/18

$$= x^{\pi/2}$$

$(1+o(1)) \Rightarrow$

$$\boxed{\alpha = \pi/2}$$

Attenzione

$$x^{\arctan x} = x^{\pi/2 (1+o(1))} \quad x \rightarrow +\infty$$

ha ordine di infinito
 $\alpha \approx \frac{\pi}{2}$

? Dipende dal fatto che $\arctan x \rightarrow \pi/2$?
 $x \rightarrow +\infty$

No!

Infatti

$$x^{1 + \frac{1}{\sqrt{\log x}}}$$

per $x \rightarrow +\infty$ non ha ordine
di infinito 1

nonostante

$$1 + \frac{1}{\sqrt{\log x}} \rightarrow 1 \quad x \rightarrow +\infty$$

$$\begin{aligned} x^{1 + \frac{1}{\sqrt{\log x}}} &= e^{\left(1 + \frac{1}{\sqrt{\log x}}\right) \log x} = e^{\log x + \sqrt{\log x}} \\ &= x \cdot e^{(\log x)^{1/2}} \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

Altri limiti notevoli:

$$\frac{\arcsin x}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$$

Defatto $y = \arcsin x$

$$\Rightarrow x = \sin y \quad \text{e} \quad y \rightarrow 0 \text{ se } x \rightarrow 0$$

$$\frac{y}{\sin y} \xrightarrow{y \rightarrow 0} 1$$

$$\Rightarrow \boxed{\arcsin x = x + o(x) \quad x \rightarrow 0}$$

Esercizi

Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^x - 1}{x} ; \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{1/x}$$

Determinare gli ordini di infinitesimo rispetto a x per $x \rightarrow 0^+$ di:

$$\sqrt[3]{x} + x^{1/4} ; \frac{\sin x + x}{\sqrt[3]{x}} ; x^2 \arctan \sqrt{x-x^2} ; x \cdot \frac{(e^{\sqrt{x}} - 1)}{\sin \sqrt{x}}$$

Esercizio: Dominio e asintoti di

$$f(x) = (x+5) \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$$

$$\text{Dominio } f = \left\{ x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} : \frac{x+1}{x-1} \geq 0 \right\}$$

$$\text{cioè } \begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x-1 > 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x+1 \leq 0 \\ x-1 < 0 \end{cases}$$

$\Downarrow$ $x > 1$ $\Downarrow$ $x \leq -1$

$$\Rightarrow \text{dom } f = (-\infty, -1] \cup (1, +\infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty \Rightarrow x=1 \text{ asintoto}$$

verticale

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

C'è asintoto obliquo a $\pm\infty$?

$$f(x) = (x+5) \sqrt{\frac{x-1+2}{x-1}} = (x+5) \sqrt{1 + \frac{2}{x-1}}$$

$$\text{oss che per } x \rightarrow \pm\infty \quad \frac{2}{x-1} \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow f(x) = (x+5) \left(1 + \frac{2}{2(x-1)} + o\left(\frac{1}{x-1}\right) \right)$$

$$= x+5 + \frac{x+5}{x-1} + o(1) = x+6 + o(1) \quad x \rightarrow \pm\infty$$

Quindi

$y = x + 6$ è asintoto obliquo
per $x \rightarrow +\infty$ che per $x \rightarrow -\infty$

Attenzione:

è vero che $\frac{x+1}{x-1} \rightarrow 1$ per $x \rightarrow \pm\infty$

però questo non significa che

$y = x + 5$ è l'asintoto! Infatti

$$f(x) = (x+5) \left(1 + o(1)\right) = x + 5 + \underbrace{x \cdot o(1)}_{\substack{\uparrow \\ \text{funzione molto} \\ \infty, 0}} + \underbrace{5 \cdot o(1)}_{o(1)}$$

$$\neq x + 5 + o(1) !!$$

Overamente non fa

$$\boxed{a} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(x+5) \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(x+5)}{x} \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} = \boxed{1}$$

$\downarrow \quad \quad \downarrow$
 $1 \quad \quad 1$

$$\boxed{b} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x+5) \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} - x = (x+5)(1 + o(1)) - x \\ = 5 + x \cdot o(1) + o(1) !! \\ = (x+5) \left(1 + \frac{1}{x-1} + o\left(\frac{1}{x-1}\right)\right) - x \quad \text{funzione molto !!} \\ = 5 + 1 + o(1) = \boxed{6}$$

Diamo e mostri che

$$f(x) = \lg(e^x + 2e^{-x})$$

$$e^x + 2e^{-x} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \text{dom } f = \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \lg(e^x (1 + 2e^{-2x}))$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x + \underbrace{\lg(1 + 2e^{-2x})}_{\downarrow 0 \text{ per } x \rightarrow +\infty} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x + \underbrace{2e^{-2x}}_{\downarrow 0} + o(e^{-x}) = x + o(1)$$

$$\Rightarrow f(x) \rightarrow +\infty \quad \text{per } x \rightarrow +\infty$$

e $y = x$ è asintoto obliquo
a $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \lg(2e^{-x} (1 + \frac{1}{2}e^{2x}))$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \lg 2 - x + \underbrace{\lg(1 + \frac{1}{2}e^{2x})}_{\downarrow 0 \text{ per } x \rightarrow -\infty}$$

$$= -x + \lg 2 + o(1)$$

$$\Rightarrow f(x) \rightarrow +\infty \quad \text{per } x \rightarrow -\infty$$

A.Cutri 8/11/18

$y = -x + \lg 2$
as. obliq.

Calculus

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^x - 1}{x}} \approx \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{x \lg x} - 1}{x} \quad (*)$$

Per $x \rightarrow 0^+ \Rightarrow x \lg x \rightarrow 0$ (little
notevole)

$$\Rightarrow e^{x \lg x} = 1 + x \lg x + o(x \lg x)$$

$$\Rightarrow (*) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cancel{x \lg x}}{\cancel{x}} = \boxed{-\infty}$$

Calculus

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{1/x}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x} \lg(\cos x)} \quad (*)$$

ore per $x \rightarrow 0 \Rightarrow \cos x \rightarrow 1 \Rightarrow$

$$\lg(\cos x) = \lg(1 + \underbrace{(\cos x - 1)}) = (\cos x - 1)$$

$\downarrow$
0

$+o(\cos x - 1)$

$$\Rightarrow (*) = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x} (-\frac{1}{2}x^2 + o(x^2))} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{-\frac{1}{2}x + o(x)} = \boxed{1}$$

Determinare gli ordini di infinitesimo per $x \rightarrow 0^+$ di

$$\sqrt[3]{x} + x^{1/4}; \quad \frac{\sin x + x}{\sqrt[3]{x}}; \quad x^2 \arcsin \sqrt{x-x^2};$$

$$x \frac{e^{\sqrt[3]{x}} - 1}{\sin \sqrt{x}}$$

1. $\sqrt[3]{x} + x^{1/4} = x^{1/3} + x^{1/4} = x^{1/4}(1 + o(1))$
 analogo $x^{1/3} = o(x^{1/4}) \Rightarrow d = 1/4$

2. $\frac{\sin x + x}{x^{1/3}} = \frac{x + o(x) + x}{x^{1/3}} = \frac{2x}{x^{1/3}} (1 + o(1))$
 $= 2x^{2/3} (1 + o(1))$
 $d = 2/3$

3. $x^2 \arcsin \sqrt{x-x^2}$
 per $x \rightarrow 0^+$ $\sqrt{x-x^2} \rightarrow 0 \Rightarrow \arcsin \sqrt{x-x^2} = \sqrt{x-x^2} + o(\sqrt{x-x^2})$
 ma $\sqrt{x-x^2} = \sqrt{x} (1 + o(1)) = \sqrt{x} + o(\sqrt{x})$
 hence $x^2 = o(x) \Rightarrow o(\sqrt{x-x^2}) = o(\sqrt{x})$
 $\Rightarrow x^2 \arcsin \sqrt{x-x^2} = x^2 \sqrt{x} (1 + o(1)) = x^{5/2} (1 + o(1))$
 $\Rightarrow d = 5/2$

4. $x \frac{e^{\sqrt[3]{x}} - 1}{\sin \sqrt{x}} = \frac{x x^{1/3} (1 + o(1))}{x^{1/2} (1 + o(1))} = x^{4/3 + 1/2} (1 + o(1))$
 $= x^{\frac{8-3}{6}} (1 + o(1)) \Rightarrow d = 5/6$

Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}} + \lg(1+x^{1/5}) - \sin(\sqrt[3]{x})}{\sqrt[3]{x} + 2\sqrt[5]{x}}$$

DENOMINATORE per $x \rightarrow 0$

$$x^{1/3} + 2x^{1/5} = 2x^{1/5}(1+o(1)) \quad x^{1/3} = o(x^{1/5}) \quad x \rightarrow 0$$

NUMERATORE

$$\lg(1+x^{1/5}) = x^{1/5}(1+o(1)) \quad x \rightarrow 0$$

$$\sin x^{1/3} = x^{1/3}(1+o(1)) = o(x^{1/5})$$

$$e^{-\frac{1}{x^2}} = o(x^{1/5}) \quad x \rightarrow 0$$

$$\frac{e^{-1/x^2}}{x^{1/5}} = \frac{1}{x^{1/5} e^{1/x^2}} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{1/5}(1+o(1))}{2x^{1/5}(1+o(1))} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

Calcolare $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\lg(1+\arcsin x^2)}{\sqrt{x} \lg x + x e^{-1/x^2}}$ (*)

NUM:

$$\arcsin x^2 \rightarrow 0 \text{ per } x \rightarrow 0^+$$

$$\Rightarrow \lg(1+\arcsin(x^2)) = \arcsin x^2 + o(\arcsin x^2)$$

$$\text{Vz } \arcsin x^2 = x^2(1+o(1)) \quad x^2 = o(x^2)$$

$$\text{DENOM: } x \rightarrow 0 (\sqrt{x} \lg x) \quad e^{-1/x^2} = o(\sqrt{x} \lg x)$$

$$\hookrightarrow \sqrt{x} \lg(x) (1+o(1))$$

$$b) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 (1+o(1))}{\sqrt{x} \lg(x)} = 0$$

$\frac{x^{3/2}}{\lg x}$ è infinitesimo
secondo ordine
per $x \rightarrow 0^+$

Mettere in ordine di infinitesimo
crescente per $x \rightarrow 0^+$
 $f(x)$ dell'esercizio precedente

$$g(x) = \exp(x) (e^{x^{3/2}} - 1)$$

$$h(x) = [\lg(1+x^{5/2})] \lg x$$

$$f(x) = \frac{x^{3/2}}{\lg x} (1+o(1))$$

Uso di
 α

$$g(x) = x^{3/2} (1+o(1))$$

$\alpha = 3/2$

$$h(x) = x^{5/2} (1+o(1)) \cdot (x+o(x)) = x^{7/2} (1+o(1))$$

$\alpha = 7/2$

$f = o(g)$ per cui $\frac{1}{\lg x} \rightarrow 0$

$g \not\sim f$

h