SPAZI CON PRODOTTO SCALARE

Sia $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ o $\mathbf{C}$ e V uno spazio vettoriale su $\mathbf{K}$. Un prodotto scalare su V é una funzione che a ogni coppia ordinata di vettori $v, w \in V$ asegna uno scalare $< v, w > \in \mathbf{K}$ tale che

1) $< u + v, w > = < u, w > + < v, w > \ \forall u, v, w \in V$
2) $< u, v > = \overline{< v, u >} \ \forall u, v \in V$
3) $< \lambda u, v > = \lambda < u, v > \ \forall u, v \in V \forall \lambda \in \mathbf{K}$
4) $< v, v > \geq 0, \ \forall \ v \in V; < v, v > = 0 \Leftrightarrow \ v = 0$

Dalle condizioni 2) e 3) segue che $< u, \lambda v > = \bar{\lambda} < u, v > \ \forall u, v \in V \forall \lambda \in \mathbf{K}$

ESEMPI

1) Siano $v = (x_1, \ldots, x_n)$ e $w = (y_1, \ldots, y_n)$ due vettori di $\mathbf{R}^n$, il prodotto scalare standard in $\mathbf{R}^n$ è definito da $< v, w > = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$.

2) Siano $v = (x_1, \ldots, x_n)$ e $w = (y_1, \ldots, y_n)$ due vettori in $\mathbf{C}^n$, il prodotto scalare standard in $\mathbf{C}^n$ è definito da $< v, w > = x_1 \bar{y}_1 + \ldots + x_n \bar{y}_n$.

3) Siano $v = (x_1, x_2)$ e $w = (y_1, y_2)$ due vettori in $\mathbf{R}^2$, un'altro prodotto scalare in $\mathbf{R}^2$ è definito da $< v, w > = x_1 y_1 - x_2 y_1 - x_1 y_2 + 4 x_2 y_2$.

4) In $V = M(n, \mathbf{K})$ si denota per B^* la matrice coniugata trasposta della matrice B (i.e. $b^*_{jk} = \bar{b}_{kj}$), $< A, B > = \operatorname{tr}(AB^*) = \operatorname{tr}(B^* A) = \sum_j (AB^*)_{jj} = \sum_j \sum_k a_{jk} b^*_{kj} = \sum_j \sum_k a_{jk} \bar{b}_{kj}$ definisce un prodotto scalare su V.
5) Sia $V = C^0([a, b]) = \{f : [a, b] \to \mathbf{R}$ continua $\}$, $< f, g > = \int_a^b f(x) g(x) dx$ è un prodotto scalare su V.

Definizione: La norma (o lunghezza) di v è $\|v\| := \sqrt{< v, v >}$. La distanza tra due vettori $v, w \in V$ è $\|v - w\|$. L'angolo θ fra $v, w \in V$ è dato da $\cos \theta = \frac{< v, w >}{\|v\| \|w\|}$.

Definizione: Uno spazio vettoriale V provvisto da un prodotto scalare $< ., . >$ è detto spazio metrico. Se reale si chiama euclideo. Se complesso si dice spazio metrico unitario.

Teorema: Se V è uno spazio vettoriale con prodotto scalare su un campo $\mathbf{K}$ allora

1) $\|v\| > 0 \ \forall v \neq 0$
2) $\|\lambda v\| = |\lambda| \ \|v\| \ \ \forall v \in V, \forall \lambda \in \mathbf{K}$
3) $| < v, w > | \leq \|v\| \ \|w\| \ \ \forall v, w \in V$ (Cauchy-Schwarz inequality).
4) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\| \ \ \forall v, w \in V$ (triangular inequality).

Dimostrazione di 3): Se $v = 0$ l'uguaglianza è sodisfatta. Se $v \neq 0$, scrivere $u = w - \frac{< w, v >}{\|v\|^2} v$. La disequazione segue da $< u, v > = 0$ e da $0 \leq \|u\|^2 = < w - \frac{< w, v >}{\|v\|^2} v, w - \frac{< w, v >}{\|v\|^2} v > = < w, w > - \frac{< w, v >< v, w >}{\|v\|^2} = \|w\|^2 - \frac{| < w, v > |^2}{\|v\|^2}$.
Dimostrazione di 4): $\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + < v, w > + < w, v > + \|w\|^2 = \|v\|^2 + 2\mathrm{Re} < v, w > + \|w\|^2 \leq \|v\|^2 + 2\|v\| \ \|w\| + \|w\|^2 = (\|v\| + \|w\|)^2$

Definizione: Sia V uno spazio dotato di prodotto scalare, $v, w \in V$ sono detti ortogonali se $< v, w > = 0$. Un insieme $S \subset V$ è detto ortogonale se i suoi elementi sono ortogonali dua a due. Un insieme $S \subset V$ è detto ortonormale se i suoi elementi oltre a essere ortogonale hanno norma 1.

Teorema (Gram-Schmidt): Ogni spazio vettoriale di dimensione finita provvisto da prodotto scalare ha una base ortogonale.

Dimostrazione: Si procede per induzione su n. Sia $\{v_1, \ldots, v_n\}$ una base qualsiasi di V. Scrivere $w_1 := v_1$. Se $\dim V = 1$ non c'e nulla da dimostrare. Supporre per induzione che il Teorema sia vero per ogni dimensione minore di dim V. Supporre che $\{w_1, \ldots, w_{n-1}\}$ sono scelti in modo che formano una base ortogonale di Span$\{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$. Scrivere $w_n = v_n - \sum_j \frac{< v_n, w_j >}{\|w_j\|^2} w_j$. Allora $w_n \neq 0$, altrimenti v_n sarebbe combinazione lineare di $w_1, \dots, w_{n-1}$ e quindi di $v_1, \dots, v_{n-1}$. Inoltre $< w_n, w_j >= 0\ \forall j = 1, \dots, n-1$. Quindi siccome $\{w_1, \dots, w_{n-1}, w_n\}$ è un insieme ortogonale di vettori non-nulli allora devono essere linealmente independenti.

Teorema: Ogni spazio vettoriale di dimensione finita dotato di prodotto scalare ha una base ortonormale.
Dimostrazione: Sostituire il vettore w_k della base ortogonale per $u_k = \frac{w_k}{\|w_k\|}$.
Nota: La dimostrazione del teorema di Gram-Schmidt fornisce un algoritmo per costruire una base ortogonale da una base data. Ogni vettore w_j è ottenuto sottraendo dal vettore dato v_j la sua proiezione ortogonale su il sottospazio generato dai vettori precedenti. L'idea è ripetuta ad ogni paso. Per ottenere una base ortonormale si divide ogni vettore per la propria lunghezza (norma).

Formulazione matriciale:
Sia V uno spazio metrico n-dimensionale e $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V. Sia $g_{ij} =< v_i, v_j >$. Se $v = \sum_i x_i v_i$ e $w = \sum_j y_j v_j$ allora $< v, w >= \sum_{i,j} x_i y_j g_{ij} = X^t G Y$, dove $X = v_{\mathcal{B}} = (x_1, \dots, x_n)$ e $Y = w_{\mathcal{B}} = (y_1, \dots, y_n)$ e $G = (g_{ij})$. Quindi $< v_i, v_j >$ è noto se i valori g_{ij} sono noti. Viceversa, dati valori arbitrari $g_{ij} \in \mathbf{K}$, e definendo un prodotto $< v, w >$ che soddisfi le regole 1) - 4) si ottiene un prodotto scalare.

Ora se $\mathcal{B}' = \{w_1, \dots, w_n\}$ è un'altra base e si ha $w_i = \sum_k p_{ki} v_k$ e $w_j = \sum_h p_{hj} v_h$ allora $g'_{ij} =< w_i, w_j >= \,=< \sum_k p_{ki} v_k, \sum_h p_{hj} v_h >= \sum_{k,h} p_{ki} g_{kh} p_{hj}$. Quindi $G' = P^t G P$, dove $G' = (g'_{ij})$ and P è la matrice che ha per colonne i vettori w_i (cioé le componenti dei vettori w_i relativi alla base $\mathcal{B}$).

Lemma: Se $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ è una base ortogonale di V, allora $\forall v \in V\ v = \sum_j \frac{< v, v_j >}{\|v_j\|^2} v_j$.
Se $\mathcal{B}$ è ortonormale allora $\forall v \in V\ v = \sum_j < v, v_j > v_j$.

Corollario: Se $\mathcal{B}$ è una base ortogonale di V, allora $\forall v, w \in V\ \ < v, w >= \sum_j \frac{< v, v_j >< v_j, w >}{\|v_j\|^2}$
e $\forall v \in V\ \|v\|^2 = \sum_j \frac{|< v, v_j >|^2}{\|v_j\|^2}$.
Se $\mathcal{B}$ è ortonormale allora $\forall v, w \in V\ \ < v, w >= \sum_j < v, v_j >< v_j, w >$ (Parseval)
e $\forall v \in V\ \|v\|^2 = \sum_j |< v, v_j >|^2$ (Pitagora).

Definizione: I numeri $\frac{< v, v_j >}{\|v_j\|^2}$ sono detti coefficienti di Fourier di v relativi alla base $\mathcal{B}$.

Definizione: Sia V uno spazio metrico, il complemento ortogonale $W^\perp$ di un insieme $W \in V$, è il sottospazio vettoriale $\{v \in V$ tale che $< v, w >= 0\ \forall w \in W\}$.

LA PROIEZIONE ORTOGONALE
Definizioni: Se V è uno spazio metrico di dimensione finita, $W \subset V$ un sottospazio vettoriale e $\{w_1, \dots, w_k\}$ una base ortogonale di W, il vettore definito da $P_W(v) = \sum_j^k < v, w_j > w_j$ è chiamato la proiezione ortogonale di v su W. L'applicazione che a ogni vettore $v \in V$ asegna la sua proiezione ortogonale $P_W(v)$ su W è detta l'applicazione proiezione ortogonale di V su W.

Proposizione: $P_W(v)$ è il vettore in W più vicino a v. Cioè $\|v - P_W(v)\| < \|v - w\|\ \forall w \in W$ tale che $w \neq P_W(v)$.
Dimostrazione: $\|v - w\|^2 = \|v - P_W(v)\|^2 + \|P_W(v) - w\|^2$ e $\|P_W(v) - w\|^2 > 0$.

Proposizione: Se W è un sottospazio vettoriale di uno spazio metrico V allora $V = W \oplus W^\perp$.
Dimostrazione: Si osservi che $P_W(w) = w \forall w \in W$ quindi $W \subset$Im P_W e Ker $P_W = W^\perp$. Inoltre $\forall v \in V\ v = P_W(v) + (v - P_W(v))$, dove $v - P_W(v) \in W^\perp$ per cui $V = W + W^\perp$. Siccome $W \cap W^\perp = 0$ si ha $V = W \oplus W^\perp$. In particolare si ha che dim$W^\perp =$dim$V-$ dim$W$ e che Im $P_W = W$.

MINIMI QUADRATI
Il sistema lineare $AX = Y$ ha una unica soluzione che minimiza $\|AX - Y\|$. La soluzione si ottiene risolvendo il sistema *normale* $A^t AX = A^t Y$, quindi $X = (A^t A)^{-1} A^t Y$. X è anche soluzione del sistema $AX = P_W(Y)$ per cui $P_W(Y) = A(A^t A)^{-1} A^t Y$ quindi la matrice della proiezione è data da $A(A^t A)^{-1} A^t$ dove le colonne della matrice A generano il sottospazio W.

APPLICAZIONI LINEARI SU SPAZI METRICI

APPLICAZIONE AGGIUNTA

Definizione: Sia V uno spazio metrico. L'aggiunta di una applicazione lineare $f : V \to V$ è l'applicazione $f^* : V \to V$ che soddisfa $< fv, w >=< v, f^*w > \ \forall v, w \in V$.

Lemma: Sia $(V, < \ , \ >)$ uno spazio metrico di dimensione finita. Sia $l : V \to \mathbf{K}$ un funzionale lineare (i.e. una applicazione lineare dove il codominio è un campo $\mathbf{K}$). Allora esiste un unico vettore $w \in V$ tale che $l(v) =< v, w > \forall v \in V$.

Dimostrazione: Considerare il funzionale $l_w(v) =< v, w > \forall v \in V$, questa applicazione è lineare rispetto at v. Sia $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base ortonormale di V. Sia $w = \sum_j \bar{l(v_j)} v_j$. Allora $l_w(v_k) =< v_k, w >=< v_k, \sum_j \bar{l(v_j)} v_j >= l(v_k)$ $\forall k$ quindi $l_w = l$. Unicità: se ci fosse un'altro vettore $u \in V$ tale che $l_w(v) = l_u(v)$ $\forall v \in V$ allora $< v, w >=< v, u > \forall v \in V$, in particolare se $v = w - u$ si ottiene $< w - u, w - u >= 0$ che implica $||w - u|| = 0$ e quindi $w = u$.

Teorema: Sia V uno spazio metrico di dimensione finita. Per ogni applicazione lineare $f : V \to V$ esiste una unica applicazione lineare $f^* : V \to V$ che soddisfa $< fv, w >=< v, f^*w > \ \forall v, w \in V$.

Dimostrazione: Preso $w \in V$ si consideri $l : V \to \mathbf{K}$ definita da $l(v) =< f(v), w >$. Per il lemma precedente esiste un unico $w' \in V$ tale che $l(v) =< f(v), w >=< v, w' > \forall v \in V$. Sia $f^* : V \to V$ definita da $f^*(w) = w'$. f^* è lineare giacché $< v, f^*(\alpha w + u) >=< f(v), \alpha w + u >= \bar{\alpha} < f(v), w > + < f(v), u >=$
$= \bar{\alpha} < v, f^*(w) > + < v, f^*(u) >=< v, \alpha f^*(w) + f^*(u) > \ \forall v \in V$.

Teorema: Sia $f : V \to V$ un'apllicazione lineare, $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base ortonormale di V e A la matrice di f relativa alla base $\mathcal{B}$. Allora la matrice $f^* : V \to V$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ è la trasposta coniugata di A (i.e. $M_{\mathcal{B}}(f^*) = \bar{A}^t := A^*$).

Dimostrazione: Sia $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$, $f(v_i) = \sum_k a_{ik} v_k$ and $f^*(v_j) = \sum_k b_{jk} v_k$.
Allora $a_{ij} =< f(v_i), v_j >=< v_i, f^*(v_j) >=< v_i, \sum_k b_{jk} v_k >= \bar{b}_{ji}$.

APPLICAZIONE AUTOAGGIUNTA O SIMMETRICHE

Definizione: Un endomorfismo $f : V \to V$ è autoaggiunto se $f = f^*$.

Proposizione: 1) Gli autovalori di un endomorfismo autoaggiunto sono reali. 2) Gli autovettori corrispondenti a autovalori distinti sono ortogonali.

Dimostrazione: 1) Sia v un autovettore relativo al autovalore λ allora $\lambda < v, v >=< \lambda v, v >=< fv, v >=$ $< v, f^*v >=< v, \lambda v >= \bar{\lambda} < v, v >$ implica $\lambda = \bar{\lambda}$ giacché $v \neq 0$.
2) Se v e w sono autovettori relativi agli autovalori λ e μ rispectivamente, allora $\lambda < v, w >=$ $< \lambda v, w >=< f(v), w >=< v, f^*(w) >=< v, \mu v >= \mu < v, w >$ implica $< v, w >= 0$ giacché $\lambda \neq \mu$.

Definizione: Sia $f : V \to V$ lineare, un sottospazio vettoriale $W \subset V$ è detto f-invariante se $f(W) \subset W$.

Proposizione: Sia $f : V \to V$ un'applicazione autoaggiunta e W un sottospazio f-invariante allora il sottospazio $W^\perp$ è anche esso f-invariante.

Dimostrazione: se $v \in W^\perp$ si ha $< f(v), w >=< v, f(w) >= 0 \forall w \in W$ giacché $f = f^*$ e $f(w) \in W \forall w \in W$ quindi $f(v) \in W^\perp$.

TEOREMA SPETTRALE: Sia V uno spazio metrico di dimensione finita e sia $f : V \to V$ un'applicazione autoaggiunta. Allora c'e una base ortonormale di V, costituita di autovettori di f.

Dimostrazione: Si procede per induzione sulla dimensione di V. Se dim$V > 0$ allora f ha un autovettore v. Si consideri $v_1 = \frac{v}{\|v\|}$. Se dim$V = 1$ il Teorema è vero. Supporre che il Teorema sia valido per ogni spazio metrico di dimensione minore di dim$V$. Sia W il sottospazio di dimensione 1 generati da v_1. Notare che W, e quindi il suo complemento ortogonale $W^\perp$ sono f-invarianti. Inoltre il prodotto scalare di V ristretto a $W^\perp$ è un prodoto scalare. Denotare per g la restrizione di f a $W^\perp$. Si verifica facilmente che g è auttoagginta rispetto al prodotto scalare di $W^\perp$. Per ipotesi induttiva $W^\perp$ ha una base ortonormale $\{v_2, \ldots, v_n\}$ che consiste di autovettori di g. Ognuno di questi vettori è anche autovettore di f, e siccome $V = W \oplus W^\perp$, $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ è la base cercata.

Se lo spazio vettoriale V è euclideo si ha il seguente risultato.

Proposizione: Ogni applicazione autoaggiunta su V ha un autovettore reale.

Dimostrazione: Per il Teorema Fondamnetale dell'Algebra ogni applicazione lineare su uno spazio vettoriale di dimensione finita sul campo $\mathbf{C}$ ha un autovalore λ. Siccome f è autoaggiunta λ è un numero reale. Se V è reale A e $A-\lambda I$ hanno coefficienti reali. Inoltre la matrice $A-\lambda I$ è non-singulare quindi il sistema lineare $(A-\lambda I)X=0$ ha una soluzione reale non banale $(X \neq 0)$.

Il viceversa del Teorema Spettrale è vero

Proposizione: Sia V uno spazio euclideo di dimensione finita e $f: V \to V$ una applicazione lineare. Allora f è autoaggiunta se e solo se$V$ ha una base ortonormale costituita di autovettori di f.

Dimostrazione: rimane dimostrare che se V ha una base ortonormale $\mathcal{B}=\{u_1,\ldots,u_n\}$ di autovettori di f allora $f=f^*$. In questa base $v=\sum_i < v,u_i > u_i$ e $w=\sum_j < w,u_j > u_j$ quindi $f(v)=\sum_i < v,u_i > f(u_i)=\sum_i < v,u_i > \lambda_i u_i$ e $f(w)=\sum_j < w,u_j > f(u_j)=\sum_j < w,u_j > \lambda_j u_j$. Allora $< f(v),w >=< \sum_i < v,u_i > \lambda_i u_i, \sum_j < w,u_j > u_j >= \sum_i \sum_j \lambda_i < v,u_i >< w,u_j >< u_i,u_j >= \sum_j \lambda_j < v,u_j >< w,u_j >= \sum_i \sum_j \lambda_j < v,u_i >< w,u_j >< u_i,u_j >=< \sum_i < v,u_i > u_i, \sum_j < w,u_j > \lambda_j u_j >=< v,f(w) >$.

La formulazione analoga nel linguaggio delle matrici è il seguente:

Definizione: Una matrice complessa che soddisfa $A=A^*(:=\bar{A}^t)$ è detta hermitiana. Una matrice reale che soddisfa $A=A^*$ è detta simmetrica.

Corollario: Se A è una matrice hermitiana allora esiste una matrice unitaria P (i.e. $P^{-1}=\bar{P}^t$) tale che $P^{-1}AP$ è diagonale.
If A è una matrice reale simmetrica allora esiste una matrice reale ortogonale P (i.e. $P^{-1}=P^t$) tale che $P^{-1}AP$ è diagonale.

TRASFORMAZIONI UNITARIE

Definizione: Siano V e W due spazi metrici su un campo $\mathbf{K}$. Si dice che una applicazione lineare $f: V \to W$ conserva prodotti scalari se $< fv, fv' >_W=< v,v' >_V \ \ \forall v,v' \in V$.

Proposizione: Se V e W sono spazi metrici su un campo $\mathbf{K}$. Allora $f: V \to W$ conserva prodotti scalari se e solo se trasforma basi ortonormali di V in basi ortonormali di W.

Proposizione: Siano V e W due spazi metrici di dimensione finita n su un campo $\mathbf{K}$. Allora $f: V \to W$ conserva prodotti scalari se e solo se $||f(v)||=||v|| \forall v \in V$.
Dimostrazione: $||v||^2+2 < v,v' > +||v'||^2 =< v+v', v+v' >=< f(v+v'), f(v+v') >=< f(v)+f(v'), f(v)+f(v') >= ||f(v)||^2+2 < f(v),f(v') > +||f(v')||^2 = ||v||^2+2 < f(v),f(v') > +||v'||^2$.

Definizione: Una applicazione lineare $f: V \to V$ è detta unitaria se è invertibile e $f^{-1}=f^*$.

Proposizione: $f: V \to V$ è unitaria se esiste f^* e $ff^*=f^*f=I$ dove I denota l'applicazione identiá.
Dimostrazione: $\Rightarrow) < f(v),v' >=< f(v), ff^{-1}(v') >=< v, f^{-1}(v') >$ quindi $f^*=f^{-1}$
$\Leftarrow) < f(v),f(v') >=< v, f^*f(v') >=< v, I(v') >=< v,v' >$ implica f conserva il prodotto scalare.

Definition: Una matrice invertibile A è unitaria se $A^{-1}=A^*$.
A è unitaria se e solo se l'insieme delle righe è ortogonale e anche l'insieme delle colonne lo è.

Lemma: Sia $f: V \to V$ una trasformazione unitaria, $\mathcal{B}$ una base ortonormale di V allora la matrice rappresentativa di f rispetto alla base $\mathcal{B}$ è una matrice unitaria.

Proposizione: Se $\lambda \in \mathbf{C}$ è un autovalore di una trasformazione unitaria allora $|\lambda|=1$.
Dimostrazione: $\lambda < v,v >=< \lambda v, v >=< f(v),v >=< v, f^*(v) >=< v, f^{-1}(v) >=< v, \lambda^{-1} v >= \bar{\lambda}^{-1} < v,v >$ siccome $||v|| \neq 0$ si ha $\lambda=\bar{\lambda}^{-1}$.

Proposizione: Sia $f: V \to V$ una trasformazione unitaria e W un sottospazio f-invariante alloran $W^\perp$ è f-invariante.

Teorema: Sia V uno spazio metrico di dimensione finita. Allora l'endomorfismo $f: V \to V$ è unitario se e solo se esiste una base ortonormale di V rispetto alla quale f è una matrice diagonale con numeri complessi di norma 1 sulla diagonale.

Dimostrazione: segue delle proposizioni precedenti e del Teorema sugli endomorfismi normali che si studiano nel seguito.

TRASFORMAZIONI ORTOGONALI

Definizioni: una matrice reale o complessa è detta ortogonale se $AA^t = I$.
Una matrice reale ortogonale è unitaria. Una matrice unitaria è ortogonale se e solo se ogni suo coefficiente è reale.

TRASFORMAZIONI ORTOGONALI SU SPAZI VETTORIALI REALI

Teorema: Sia V uno spazio metrico di dimensione n sul campo $\mathbf{R}$ e sia $f : V \to V$ una'applicazione lineare. Allora esiste un sottospazio $W \subset V$ f-invariante con $\dim W = 1$ o $\dim W = 2$.

Dimostrazione: Sia λ_0 una radice del polinomio caratteristico, se $\lambda_0 \in \mathbf{R}$ è un autovalore allora esiste un autovettore v_0 a lui relativo. Quindi $W = \mathrm{Span}\{v_0\}$ è un sottospazio f-invariante di $\dim W = 1$.

Se λ_0 non appartiene a $\mathbf{R}$ allora $\lambda_0 = \alpha + i\beta,\ \alpha \in \mathbf{R},\ \beta \in \mathbf{R}$. Il fatto che $\det(A - \lambda_0 I) = 0$ implica che esiste $Z = X + iY \neq 0 \in \mathrm{Ker}(A - \lambda_0 I)$ dove $X, Y \in \mathbf{R}^n$ i.e. $AZ = \lambda_0 Z$. Siccome A è una matrice reale $AX + iAY = (\alpha + i\beta)(X + iY) = (\alpha X - \beta Y) + i(\beta X + \alpha Y)$ si ha $\begin{cases} AX = & \alpha X - \beta Y \\ AY = & \beta X + \alpha Y \end{cases}$

Allora $W = \mathrm{Span}\{X, Y\}$ è A-invariante. Siccome $Z \neq 0$ allora $X \neq 0$ o $Y \neq 0$ o ambedue, si ha dunque $\dim W = 1$ o $\dim W = 2$ secondo sia il caso.

Definizione: una applicazione lineare f su uno spazio vettoriale V è detta ortogonale se è invertibile e se $f^{-1} = f^*$.

Lemma: Sia $f : V \to V$ un'applicazione ortogonale, $\mathcal{B}$ una base ortonormale di V allora la matrice A rappresentativa di f relativa alla base $\mathcal{B}$ è una matrice ortogonale ($A^{-1} = A^t$).

Osservare che $\det A = 1$ o $\det A = -1$ giacché $A^t A = I$ e $\det A = \det A^t$.

Caratterizzazione delle matrici ortogonali di ordine 2.

Sia $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ con $\det A = ad - cb = 1$. Da $A^t A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ne segue che

$a^2 + c^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad a = \cos\theta_1,\ c = \sin\theta_1,$

$b^2 + d^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad b = \cos\theta_2,\ d = \sin\theta_2,$

$ab + cd = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = \cos\theta_1 \cos\theta_2 + \sin\theta_1 \sin\theta_2 = \cos(\theta_2 - \theta_1),$

$ad - cb = 1 \quad \Rightarrow \quad 1 = \cos\theta_1 \sin\theta_2 - \sin\theta_1 \cos\theta_2 = \sin(\theta_2 - \theta_1).$

allora $\theta_2 - \theta_1 = \frac{\pi}{2}$ quindi

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & \cos\theta_2 \\ \sin\theta_1 & \sin\theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & \cos(\theta_1 + \frac{\pi}{2}) \\ \sin\theta_1 & \sin(\theta_1 + \frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix}.$$

Geometricamente produce una rotazione di angolo θ in senso antiorario.

Sia $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ con $\det A = ad - cb = -1$, da calcoli analoghi si ottiene $\theta_2 - \theta_1 = -\frac{\pi}{2}$ quindi

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & \sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & -\cos\theta_1 \end{pmatrix}.$$

Esempio: Con $\theta = 0$ si ottiene $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, geometricamente produce una riflezione rispetto all'asse x.

Definizione: Sia A una matrice ortogonale, se $\det A = 1$ allora è detta rotazione. Invece, se $\det A = -1$ è detta riflessione. Una rotazione è detta semplice se esiste un sottospazio $W \subset V$ A-invariante di $\dim W = 2$, $A|_W$ è una rotazione e $A|_{W^\perp} = I$. Una riflezione è detta semplice se esiste $0 \neq v \in V$ tale che $Av = -v$ e $A|_{v^\perp} = I$

Teorema: Sia V uno spazio metrico di dimensione finita, sia $f : V \to V$ una applicazione ortogonale allora esiste una base ortonormale di V relativa alla quale f è una matrice del tipo

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} \cos\theta_k & -\sin\theta_k \\ \sin\theta_k & \cos\theta_k \end{pmatrix} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -I & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & I \end{pmatrix}$$

Dimostrazione: Se dim$V = 1$ o 2 il Teorema è stato giá verificato, supporre quindi che dim$V \geq 3$. Sia $W \subset V$ un sottospazio f-invariante di dim 1 or 2, Allora $f|_W$ è ortogonale quindi esiste una base di W nella quale la matrice rappresentativa è: se dim$W = 2$ $[f|_W] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ o $[f|_W] = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, se dim$W = 1$, $[f|_W] = (-1)$ or $[f|_W] = (1)$. Inoltre siccome $W^\perp$ è f-invariante e dim$W$ <dim$V$ si puo applicare il procedimento descritto prima a $W^\perp$ fino a ottenere la base cercata, riordinando i sottospazi invarianti se necessario.

Corollario: Ogni applicazione ortogonale è il prodotto di rotazioni e riflessioni semplici che commutano.

Osservazione: In generale un endomorfismo ortogonale sul campo reale non diagonalizza.

ENDOMORFISMI NORMALI

Definizione: Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbf{C}$. Un endomorfismo $f : V \to V$ è detto normale se è invertibile e se $ff^* = f^*f$.

Definizione: Una matrice complessa invertibile A è detta normale se $AA^* = A^*A$. In particolare endomorfismi autoaggiunti, unitari oppure ortogonali sono normali.

Proposizione: Sia $f : V \to V$ un endomorfismo normale e W un sottospazio f-invariante allora $W^\perp$ é f-invariante.

Teorema: Sia $(V, \mathbf{C})$ uno spazio metrico di dimensione finita. Allora un endomorfismo $f : V \to V$ è normale se e solo se esiste una base ortonormale di V relativa alla quale f è diagonale.

Dimostrazione: Basta dimostrare che f è normale se e solo se $f = g + ih$ dove g e h sono endomorfismi autoaggiunti che commutano. Si procede applicando il Teorema spettrale per endomorfismi autoaggiunti e si verifica che g e h diagonalizzano nella stesssa base. Prendere $g = \frac{f+f^*}{2}$ e $h = \frac{f-f^*}{2i}$.

Corollario: Se A è una matrice normale allora esiste una matrice unitaria P (i.e. $P^{-1} = \bar{P}^t$) tale che $P^{-1}AP$ è diagonale.