GEOMETRIA.

1. Insieme di numeri. Insieme infiniti. Cardinalità. $|\mathbf{N}| = |\mathbf{Z}| = |\mathbf{Q}|$; $|\mathbf{R}| = |(0,1)| > |\mathbf{N}|$. Numeri complessi: Operazioni di somma e prodotto. Il coniugato. Rappresentazione geometrica e forma trigonometrica dei numeri complesi.
2. Polinomi: operazioni d somma, prodotto per uno scalare y prodotto tra polinomi. Principio di Euclide. Divisibilità. Teorema di Ruffini. Radici e molteplicità. Teorema fondamentale dell'algebra. Radici di un polinomio reale. Scomposizione dei polinomi complessi e reali in fattori irriducibili. Radice n-esima di un numero complesso.
3. Assiomi di definizioni di campo e di spazio vettoriale. Unicità dell'elemento neutro e dell'opposto. Teorema dell'annullamento del prodotto. Esempi: 1) Il campo $\mathbf{K}$ come $\mathbf{K}$-spazio vettoriale. 2) Lo spazio $\mathbf{R}^n$ delle n-uple reali. 3) Lo spazio $\mathbf{C}^n$ delle n-uple complesse come $\mathbf{C}$-spazio vettoriale e come $\mathbf{R}$-spazio vettoriale. 4) Lo spazio dei polinomi reali $\mathbf{R}[x]$. 5) Lo spazio $\mathbf{R}_n[x]$ dei polinomi reali di grado minore o uguali a n.
4. Matrice di m righe ed n colonne. Matrice nulla, trasposta; matrici quadrate: identità, diagonale, scalare, triangolare superiore, triangolare inferiore, simmetrica e antisimmetrica. Somma tra matrici e moltiplicazione di una matrice per uno scalare. 6) Lo spazio $M(\mathbf{R}; m, n)$ delle matrici a coefficienti reali di ordine m per n. Prodotto di matrici (riga per colonna). Matrice inversa.
5. Operazione elementari sulle righe (colonne). Riduzione per righe (colonne). Matrici equivalenti per righe (colonne). Rango. Algoritmo di Gauss.
6. Definizione di sottospazio vettoriale. Caratterizzazione dei sottospazi di $\mathbf{R}^2$ e di $\mathbf{R}^3$. Esempi 7) L'insieme V dei numeri reali strettamente positivi con le leggi di composizione interna $(x, y) \mapsto xy \;\; \forall x, y \in V$ ed esterna $(a, x) \mapsto x^a \;\; \forall a \in \mathbf{R}, \forall x \in V$ è un $\mathbf{R}$-spazio vettoriale. Ma non è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}$ con le leggi usuali di somma e prodotto per uno scalare. 8) L'insieme S^1 dei numeri complessi di modulo 1 con le leggi di composizione interna $(e^{i\theta}, e^{i\phi}) \mapsto e^{i(\theta+\phi)} \; \forall e^{i\theta}, e^{i\phi} \; \in S^1$ ed esterna $(a, e^{i\theta}) \mapsto e^{ia\theta} \;\; \forall a \in \mathbf{R}, \forall e^{i\theta} \in S^1$ è un $\mathbf{R}$-spazio, ma non è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R^2}$ con le leggi usuali di somma e prodotto per uno scalare ereditate da $\mathbf{R^2}$. Esempi di sottospazi vettoriali degli spazi vettoriali $\mathbf{R}_n[x]$ e $M(\mathbf{R}; m, n)$.
7. Combinazione lineare. Insieme di generatori. Spazi vettoriali finitamente generati. Indipendenza e dipendenza lineare di una collezione di vettori. Base di uno spazio vettoriale. Componenti di un vettore relativi ai vettori di una base. Esempi. Lo spazio delle righe di una matrice.
8. Esistenza di una base di uno spazio vettoriale finitamente generato. Teorema del completamento ad una base. Lemma di Steinitz. Dimensione di uno spazio vettoriale.
   Applicazioni della riduzione di matrici al calcolo della dimensione di spazi e sottospazi vettoriali.
9. Unione, intersezione e somma di sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale. Caratterizzazione della somma diretta : $W + U = W \oplus U \Leftrightarrow W \cap U = \{0\}$. Esempi di somma ed intersezione di sottostai vettoriali. Formula di Grassman: $\dim(W + U) + \dim(W \cap U) = \dim W + \dim U$. Corollario: $W + U = W \oplus U \Leftrightarrow \dim(W + U) = \dim W + \dim U$.
10. Determinante di una matrice quadrata di ordine n: permutazione, inversione, segno di una permutazione, formula esplicita. Proprietà. Cofattore o complemento algebrico. Teoremi di Laplace. Definizione assiomatica del determinante. Teorema di Binnet: $\det(AB) = \det A \det B$ ed altre proprietà. Applicazione: calcolo dell'inversa di una matrice. Teorema: A è invertibile se e solo se $\det A \neq 0$.
11. Equazione lineare. Sistema lineare di m equazioni in n incognite. Soluzione di un sistema lineare. Sistema ridotto. Sistemi equivalenti. Equazione lineare a coefficienti vettoriali. Teorema di Rouché-Capelli sulla risolubilità: $AX = B$ è risolubile $\Leftrightarrow$ rango A =rango (A, B).
12. Sistemi lineari omogenei ($AX = 0$). Soluzione generale di un sistema risolubile. Teorema di Rouché-Capelli sulla dimensione dell'insieme delle soluzioni dei sistemi risolubili: Se $AX = B$ è risolubile allora la cardinalità dell'insieme delle soluzioni del sistema è $\infty^{n-\rho}$, dove n è il numero delle incognite e ρ è il rango di A. Sistemi lineari con incognite vettoriali. Applicazione: calcolo della matrice inversa A^{-1} di una matrice quadrata A.
13. Regola di Cramer. Teorema: Siano A una matrice, $\mathcal{R}$ lo spazio generato dalle righe di A e $\mathcal{C}$ lo spazio generato dalle colonne di A, allora Rango $A = \dim \mathcal{R} = \dim \mathcal{C}$.

14. Prodotto scalare in $\mathbf{R}^2$. Norma di un vettore. Angolo tra due vettori. Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz. Disuguaglianza triangolare. Area del triangolo. Proiezione ortogonale (di un vettore nella direzione di un'altro). Equazione cartesiana e parametrica di una retta nel piano.
15. Prodotto vettoriale, prodotto scalare e prodotto misto in $\mathbf{R}^3$. Orientazione. Volume de un parallelepipedo. Equazioni parametriche e cartesiane di rette e piani nello spazio. Proiezione ortogonale da un punto a una retta e da un punto a un piano. Equazione del piano: passante per tre punti, che contiene due rette, che contiene una retta e un punto esterno ad essa. Intersezione e posizione relative tra rette, tra piani e tra rette e piani nello spazio.
16. Parallelismo e perpendicolarità. Distanza fra due punti, da un punto a una retta, da un punto a un piano, tra due piani (paralleli), tra due rette (parallele o sghembre). Equazione della retta che interseca perpendicolarmente due rette sghembe.
17. Definizione di applicazione lineare. Proprietà. Esempi. Definizioni di Ker (nucleo) e Im (immagine). Applicazioni lineari iniettive, suriettive e biiettive. Dipendenza (indipendenza) lineare e applicazioni lineari. Teorema della dimensione: Sia $f : V \to W$ una applicazione lineare, se $\dim V = n < \infty$ allora $\dim \ker f \leq n$, $\dim \mathrm{Imf} \leq n$ e $\dim \ker f + \dim \mathrm{Imf} = \dim V$.
18. Matrice rappresentativa di una applicazione lineare fra spazi vettoriali di dimensione finita. Tre modi per definire una applicazione lineare fra spazi vettoriali di dimensione finita. Calcolo delle basi (e delle dimensioni) del nucleo ($\ker f$) e della imagine ($\mathrm{Im} f$) di una applicazione utilizzando la matrice rappresentativa. Esempi.
19. Operazioni tra applicazioni lineari: somma, moltiplicazione per uno scalare, composizione, l'inversa ($f+g$, αf, $f \circ g$, f^{-1}), e le corrispondenti matrici rappresentative: $M(f+g) = M(f)+M(g)$, $M(\alpha f) = \alpha M(f)$, $M(f \circ g) = M(f)M(g)$, $M(f^{-1}) = [M(f)]^{-1}$. Matrice dell'applicazione identitá in basi diverse. Matrice di cambiamento di base. Matrice di un'applicazione lineare in basi diverse.
20. Endomorfismi: autovalori, autovettori, autospazi. Polinomio caratteristico. Molteplicità algebrica e molteplicità geometrica di un autovalore. Endomorfismi semplici o diagonalizzabili. Criteri di diagonalizzazione.
21. Matrici diagonalizzabili. Il polinomio caratteristico è un invariante dell'endomorfismo, e quindi i suoi coefficienti lo sono: la traccia $A=$ somma degli autovalori, il det $A=$ prodotto degli autovalori. Matrice esponenziale.
22. Forme bilineari, non degeneri, simmetriche e antisimmetriche, hermitiane, semidefinite e definite positive e negative. Prodotto scalare. Spazi vettoriali con prodotto scalare. Matrice associata a un prodotto scalare. Ortogonalità. Basi ortogonali (Gram-Schmidt). Ortonormalità. Basi ortonormali. Formula di Parseval. Teorema di Pitagora.
23. Matrice di un prodotto scalare in basi diverse. Supplemento ortogonale di un sottopazio vettoriale. Proiezione ortogonale su un sottospazio vettoriale.
24. Applicazione aggiunta. Matrice dell'applicazione aggiunta. Proprietà dell'aggiunta. Endomorfismi simmetrici o autoaggiunti. Prodotto Hermitiano su spazi vettoriali complessi. Teorema spettrale.
25. Isometrie lineari (endomorfismi che preservano i prodotti scalari). Matrici ortogonali e unitarie. Formulazione matriciale del Teorema spettrale. Caratterizzazione delle matrici ortogonali di ordine 2. Classificazione delle matrici ortogonali di ordine 3.
    Movimenti rigidi (isometrie affini) in $\mathbf{R}^2$ e in $\mathbf{R}^3$.
26. Esempio di applicazione aggiunta. Esempi di endomorfismi autoaggiunti (simmetrici) e antisimmetrici. Esempi: proiezione ortogonale su un piano, proiezione ortogormale su una retta. Base ortonormale dello spazio delle matrice simmetriche.