VIII. Prodotti scalari.

1. Si consideri in $\mathbf{R}^3$ il prodotto scalare standard $< (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) >= x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$. Scrivere la sua matrice associata relativa alla base $v_1 = (1, 1, 0)$, $v_2 = (0, 1, 1)$, $v_3 = (1, 1, 1)$.

2. Siano $v = (x_1, x_2, x_3)$ e $w = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbf{R}^3$. Determinare quali delle seguenti funzioni bilineari definiscono un prodotto scalare in $\mathbf{R}^3$.
   a) $< v, w >= x_1y_2 + x_2y_1 + x_3y_3$.
   b) $< v, w >= x_1y_1 + x_2y_2 + 3x_3y_3$.
   c) $< v, w >= 2x_1y_1 - x_2y_2 + x_3y_3$.

3. Considerare la seguente forma bilineare in $\mathbf{R}_3[x]$: se $p, q \in \mathbf{R}^3[x]$,

$$b(p, q) = \int_0^1 p(t)q(t)dt.$$

   a) Verificare che b definisce un prodotto scalare su $\mathbf{R}^3[x]$.
   b) Calcolare la matrice di b relativa alla base $\{1, x, x^2, x^3\}$.
   c) Applicare il precesso di Gram-Schmidt alla base $\{1, x, x^2, x^3\}$.

4. Sia $\mathcal{S}$ lo spazio vettoriali delle matrici simmetriche di ordine 2. Siano $A, B \in \mathcal{S}$, definere

$$b(A, B) = \text{trace}AB.$$

   a) Dimostrare che b definisce un prodotto scalare su $\mathcal{S}$.
   b) Decidere se b definisce un prodotto scalare su $M(2, \mathbf{R})$
   c) Fissata una base di $\mathcal{S}$, scrivere la matrice associata a b nella base scelta.

6. Sia $V = C_0([0, 2\pi]) = \{f : [0, 2\pi] \to \mathbf{R} \text{ continua } \}$ con il prodotto scalare $< f, g >= \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx$.
   a) Dimostrare che $\sin x$ e $\cos x$ sono ortogonali.
   b) Calcolare la lunghezza di $\sin x$.

7. Siano $w_1 = (1, 2, 1)$ e $w_2 = (1, -3, 2)$ vettori in $\mathbf{R}^3$. Determinare una base ortogonale $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ di $\mathbf{R}^3$ tale che sia positivamente orientata e che $\text{Span}\{w_1, w_2\} = \text{Span}\{v_1, v_2\}$.