I. numeri complessi, polinomi, matrici.

---

1. Considerato il numero complesso $z = 1 + i$, calcolare e rappresentare graficamente i numeri complessi $\bar{z}^2$, z^6, z^{-1}, $\sqrt{z}$.
2. Trovare il coniugato, l'inverso e la radice cubica del numero complesso $i - 1$.
3. Trovare le radici dei polinomio $x^3 - 8$ e $x^4 + 16$.
4. Determinare quoziente e resto della divisione della seguente coppia di polinomi
   (a) $p_1(x) = x^4 + x + 1, p_2(x) = x^2 - i$;
   (b) $q_1(x) = x^4 + i$, $q_2(x) = 4x^4 - 2i$.
5. Determinare per quali valori del parametro k il polinomio $x^4 - kx^2 + 2 - i$ è divisibile per $x + 1$.
6. Determinare per quali valori a, b il polinomio $x^3 + ax + b$ ammette 1 come radice di molteplicitá due.
7. Trovare le soluzioni di a) $z^2 + 2z + i = 0$, b) $z^2 + 3iz + 4 = 0$.
8. Calcolare la matrice inversa di $\begin{pmatrix} i+1 & 2 \\ i & i \end{pmatrix}$
9. Considerata la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
   (a) Determinare il suo rango.
   (b) Trovare i valori $\lambda \in \mathbf{C}$ tali che $\det(A - \lambda I) = 0$
10. Calcolare la matrice inversa di $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. Calcolare A^2 e A^n.
11. Determinare tutti i numeri complessi z per cui la matrice A non è invertibile
$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -z \\ z^3 & -1 & 4i \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
12. Calcolare il determinante delle matrici
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ 6 & 0 & 3 & 2 \\ 23 & 8 & 7 & 9 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}.$$
13. Trovare il rango della matrice
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$
14. Trovare il rango delle matrici al variare del parametro h
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & h \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -h & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ h & -2 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & i & 1 & -1 \\ 1 & 2hi & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & h \end{pmatrix}.$$

1. Verificare che $V = \mathbf{R}^2$ con le seguenti leggi di composizione non è uno spazio vettoriale su $\mathbf{R}$.
   (a) interna: $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_2)$; esterna: $\alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y)$.
   (b) interna: $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$; esterna: $\alpha(x, y) = (0, \alpha y)$.

2. Verificare che
   (a) $\mathbf{C}$ è un $\mathbf{C}$- spazio vettoriale con le leggi usuali: $\forall z_1 = x_1 + iy_1$ e $z_2 = x_2 + iy_2, z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$ e $\forall \alpha = a + ib \in \mathbf{C}\ \alpha z = (ax - by) + i(ay + bx)$.
   (b) $\mathbf{C}$ è un $\mathbf{R}$-spazio vettoriale con le leggi : $z_1 + z_2$ definita come prima e $\forall \alpha \in \mathbf{R}\ \alpha z = \alpha x + i\alpha y$.

3. Sia V l'insieme dei numeri reali strettamente positivi. Dimostrare che V è un $\mathbf{R}$-spazio vettoriale rispetto alle operazioni $\oplus, \otimes$ definite come segue: $x \oplus y = xy \ \ \forall x, y \in V$; $a \otimes x = x^a \ \ \forall a \in \mathbf{R}, x \in V$. Osservare che. con le leggi usuali di somma e prodotto per uno scalare ereditate da $\mathbf{R}$, V non è un sottospazio vettoriale $\mathbf{R}$.

4. Sia S^1 l'insieme dei numeri complessi di modulo 1. Verificare che S^1 è un $\mathbf{R}$-spazio vettoriale con le leggi di composizione interna $(e^{i\theta}, e^{i\phi}) \mapsto e^{i(\theta+\phi)}\ \forall e^{i\theta}, e^{i\phi} \ \in S^1$ ed esterna $(a, e^{i\theta}) \mapsto e^{ia\theta} \ \ \forall a \in \mathbf{R}, \forall e^{i\theta} \in S^1$. Osservare che con le leggi usuali di somma e prodotto per uno scalare ereditate da $\mathbf{R^2}$, S^1 non è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R^2}$.

5. Verificare che l'insieme $W = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 : x_i > 0\}$ non è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^3$.

6. Determinare quali dei seguenti insiemi è sottospazio vettoriale di $V = \mathbf{R}^2$:
   a) $A = \{(x, y) \in V$ tali che $xy = 0\}$.
   b) $B = \{(x, y) \in V$ tali che $x = y$ oppure $y = 0\}$.
   c) $C = \{(x, y) \in V$ tali che $x^2 + y^2 = 1\}$.
   d) $D = \{(x, y) \in V$ tali che $x^2 - y^2 = 0\}$.
   e) $E = \{(t^2, t^2) \in V$ tali che $t \in \mathbf{R}\}$.
   f) $F = \{(t^3, t^3) \in V$ tali che $t \in \mathbf{R}\}$.
   g) $G = \{(x, y) \in V$ tali che $y - 1 = 0\}$.

7. Determinare quali dei seguenti insiemi è sottospazio vettoriale di $V = \mathbf{R}^3$:
   a) $A = \{(x, y, z) \in V$ tali che $x^2 + y^2 = 1\}$.
   b) $B = \{(x, y, z) \in V$ tali che $x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.
   c) $C = \{(x, y, z) \in V$ tali che $x^2 + y^2 + z^2 = 0\}$.
   d) $D = \{(x, y, z) \in V$ tali che $x = 0\}$.
   e) $E = \{(x, y, z) \in V$ tali che $x = 0$ e $y = 0\}$.
   f) $F = \{(x, y, z) \in V$ tali che $xy = 0\}$.
   g) $G = \{(t, t, t) \in V$ tali che $t \in \mathbf{R}\}$.
   h) $H = \{(t^2, t^2, t^2) \in V$ tali che $t \in \mathbf{R}\}$.

1. Decidere se i seguenti vettori sono indipendenti o meno
$(a)\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix};\ (b)\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\-3\end{pmatrix};\ (c)\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix};\ (d)\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}.$

2. Nello spazio vettoriale $\mathbf{R}^4$ considerare i vettori $\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}.$
   (a) Determinare se la collezione di vettori dati è linearmente indipendente.
   (b) Determinare se i vettori dati generano $\mathbf{R}^4$.
   (c) Determinare se i vettori dati formano una base di $\mathbf{R}^4$, giustificare.

3. Per ognuno dei seguenti spazi scrivere l'espressione dell'elemento generico e trovare un insieme di generatori.
   (a) $\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 : x-y+z=0,\ -2y-z=0\}$.
   (b) $\{(x,y,z,t)\in\mathbf{R}^4 : x+2z=0\}$.
   (c) $\{(x,y,z,t)\in\mathbf{R}^4 : x-z=0,\ y+2t=0\}$

4. Sia $M(2,\mathbf{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici quadrate reali di 2^o ordine.
   (a) Verificare che le matrici $E_{11}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $E_{12}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$, $E_{21}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$, $E_{22}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$ generano $M(2,\mathbf{R})$.
   (b) Verificare che le matrici $E_{11},\ E_{21},\ E_{12},\ E_{22}$ sono linearmente indipendenti.
   (c) Calcolare la dimensione di $M(2,\mathbf{R})$

5. Sia $\mathbf{R}_2[x]$ lo spazio dei polinomi a coefficienti reali di grado minore o uguale a 2.
   (a) Verificare che i polinomi $1,\ x,\ x^2$ generano $\mathbf{R}_2[x]$.
   (b) Verificare che i polinomi dati in (a) sono linearmente indipendenti.
   (c) Calcolare la dimensione di $\mathbf{R}_2[x]$.

6. Siano $p(x)=1-x,\ q(x)=x-x^2,\ r(x)=1-x^2,\ s(x)=1+x^2$.
   Stabilire se $s(x)\in \text{Span}\{p(x),\, q(x),\, r(x)\}$.

1. Siano $V = \mathbf{R}^2$, $U = \{(x, y) \in V \ : x = y\}$ e $W = \{(x, y) \in V \ : x = -y\}$.
   (a) Disegnare gli insiemi U, W, $U \cap W$, $U \cup W$ e $U + W$.
   (b) Calcolare le dimensioni di U, W, $U \cap W$, e $U + W$.

2. Siano $V = \mathbf{R}^3$, $U = \{(x, y, z) \in V \ : z = 0\}$ e $W = \{(x, y, z) \in V \ : x = y \text{ e } z = 0\}$.
   (a) Disegnare gli insiemi U, W, $U \cap W$, $U \cup W$ e $U + W$.
   (b) Calcolare le dimensioni di U, W, $U \cap W$, e $U + W$.

3. Nello spazio vettoriale $V = \mathbf{R^3}$ si considerino i sottospazi $U = \{(x, y, z) \in V \text{ tali che } 3x + y - z = 0\}$ e $W = \text{ Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$.
   (a) Esibire una base di U e una base di W.
   (b) Calcolare le dimensioni di U, W, $U \cap W$, e $U + W$.

4. Nello spazio vettoriale $\mathbf{R^4}$ considerare i sottospazi $W = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$.
   e $U = \{(x, y, z, t) \text{ tali che } 2x + y = 0, \ 3z - t = 0\}$.
   (a) Trovare una base per U e per W.
   (b) Calcolare le dimensioni di $U \cap W$, $U + W$.
   (c) Determinare se la somma è diretta.
   (d) Determinare se la somma è $\mathbf{R^4}$.

5. Siano $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   (a) Determinare la dimensione e una base di Span$\{A, B, C, D\}$
   (b) Sia U =Span$\{A, B\}$, V =Span$\{C, D\}$. Determinare la dimensione e una base di $U \cap V$ e di $U + V$.

6. Sia $V = M(2, \mathbf{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici quadrate reali di 2^o ordine. Considerare gli insiemi $W = \{A \in V \ : \ A^t = A\}$, $U = \{A \in V \ : \ A^t = -A\}$, $S = \{A \in V \ : \ A \text{ è triangolare superiore}\}$ e $T = \{A \in V : \text{ traccia } A = 0\}$.
   (a) Dimostrare che W, U, S e T sono sottospazi vettoriale di V.
   (b) Trovare una base e calcolare la dimensione per ogni sottospazio.
   (c) Dimostrare che la somma $W + U$ é diretta.
   (d) Trovare una base e calcolare la dimensione per $W \cap S$ e $W \cap T$.
   (e) Sia $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$, calcolare le componenti di A rispetto alla base di W e di T trovate in (b).

7. Sia $V = \mathbf{R}_2[x]$ lo spazio dei polinomi a coefficienti reali di grado minore o uguale a 2. Considerare gli insiemi $W = \{p \in V \text{ tali che } p(2) = 0\}$ e $Z = \{p \in V \text{ tali che } p(1) = 0, p(-1) = 0\}$.
   (a) Dimostrare che W e Z sono sottospazi vettoriale di V.
   (b) Dimostrare che la somma di W con Z é diretta.
   (c) Verificare che $\mathcal{B} = \{x - 2, x^2 - 4\}$ e $\mathcal{B}' = \{x - 2, x(x - 2)\}$ sono basi di W.
   (d) Calcolare le componenti del polinomio $x^2 - 4$ rispetto alle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ di W.

8. Sia $V = \mathbf{R}_2[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi reali di grado minore o uguale a 2. Si considerino i sottospazi

$$U = \text{Span} \left\{ x^2 - x, \ x^2 - 1, \ x - 1 \right\} \text{ e } W = \{p \in V \mid p(0) = 0 \text{ e } p(1) = 0\}.$$

   (a) Trovare una base per U e per W e determinare le rispettive dimensioni.

(b) Calcolare le dimensioni di $U+W$ e di $U \cap W$.
(c) Determinare se la somma è diretta e se $U+W=V$, giustificare le risposte.

9. Sia $V = M(2, \mathbf{R})$. Sia
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
Considerare gli insiemi $U = \{X \in V \text{ tali che } AX = 0\}$ e $W = \{X \in V \text{ tali che } XA = 0\}$.
(a) Dimostrare che U e W sono sottospazi vettoriale di V.
(b) Trovare una base e calcolare la dimensione per U, W, $U \cap W$ e $U+W$.

8. In $V = M(2, \mathbf{C})$, considerare l'insieme delle matrici Hermitiane $H = \{A \in V \text{ tale che } A^t = \bar{A}\}$.
(a) Verificare che H non è un sottospazio vettoriale di $(V, \mathbf{C})$.
(b) Verificare che H è un sottospazio vettoriale di $(V, \mathbf{R})$.
(c) Calcolare la dimensione $\dim_{\mathbf{R}} H$ di H.

1. Risolvere i sistemi di equazioni lineari

$$a)\begin{cases} x-2y &= 1 \\ 3x+2y &= 11 \end{cases} \quad b)\begin{cases} x-2y &= 1 \\ 3x-6y &= 11 \end{cases} \quad c)\begin{cases} x-2y &= 1 \\ 3x-6y &= 3 \end{cases}$$

2. Considerati i sistemi lineari discutere le eventuali soluzioni al variare dei parametri $h,\, k \in \mathbf{R}$.

$$a)\begin{cases} x-y-z &= 0 \\ 3x+y+2z &= 0 \\ 4x+hz &= 0 \end{cases}$$

$$b)\begin{cases} -hx+y+z &= 2 \\ x-y &= -1 \\ hx-2y-2z &= k \end{cases}$$

3. Stabilire per quali t i sistemi sono compatibili, in tal caso risolvere

$$a)\begin{cases} x+2y-z &= 0 \\ x-y &= 1 \\ x+tz &= 1 \end{cases}$$

$$b)\begin{cases} (2+t)x+y+(1+t)z &= t-1 \\ tx+tz &= 1 \\ (2+2t)x+y+(1+2t)z &= t^2 \end{cases}$$

4. Per ogni $t \in \mathbf{R}$ si considerino i vettori di $\mathbf{R^3}$

$$u_t = \begin{pmatrix} 2+t \\ t \\ 2+2t \end{pmatrix},\ v_t = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ w_t = \begin{pmatrix} 1+t \\ t \\ 1+2t \end{pmatrix},\ x_t = \begin{pmatrix} t-1 \\ 1 \\ t^2 \end{pmatrix}$$

   (a) Determinare tutti i $t \in \mathbf{R}$ tali che $x_t \in \mathrm{Span}\{u_t, v_t, w_t\}$.
   (b) Per tali t scrivere x_t come combinazione lineare dei vettori u_t, v_t, w_t.

1. Si considerino le rette $r = \begin{cases} -x+z &= 1 \\ -x+2y+z &= 1 \end{cases}$ e $s_t = \begin{cases} tx+2y &= -1 \\ (2+t)x-2z &= -t \end{cases}$
   a) Determinare per quali $t \in \mathbf{R}$, $\mathbf{r}$ e s_t sono parallele, incidenti o sghembe.
   b) Nel caso $t = 0$ calcolare la distanza tra le rette e l'equazione cartesiana del piano che le contiene.
   c) Nel caso $t = 3$ determinare l'equazione cartesiana del piano che le contiene.
   d) Nel caso $t = -2$ calcolare la distanza tra le rette.

2. Si considerino il piano α di equazione $2x + y - z = 2$ e la retta $r_t = \begin{cases} -x+2y &= 1 \\ y+tz &= 1 \end{cases}$
   a) Determinare per quali $t \in \mathbf{R}$ la retta r_t è parallela al piano α
   b) Determinare per quali $t \in \mathbf{R}$ la retta r_t è ortogonale al piano α .
   c) Nel primo caso calcolare la distanza tra di loro.

3. Usando il prodotto vettoriale, determinare l'area del parallelogramma costruito sui vettori $v = (1, 2, 1)$ e $w = (-3, 1, 1)$.

4. a) Determinare l'area del triangolo di vertici $P = (1, 3, 1)$, $Q = (2, 1, -1)$ e $R = (4, 2, -2)$.
   b) Determinare il coseno dell'angolo di vertice Q.

5. Siano $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ tre punti in $\mathbf{R}^3$.
   a) Determinare una equazione cartesiana del piano perpendicolare al vettore $\vec{PQ}$ che passa per R.
   b) Scrivere una equazione cartesiana della retta che passa per i punti P e Q.
   c) Calcolare la distanza dal punto R alla retta che passa per i punti P e Q.
   d) Calcolare l'area del triangolo di vertici P, Q, R.
   e) Sia O l'origine di $\mathbf{R}^3$, calcolare il volume del parallelepipedo di lati OP, OQ, OR.

6. Si considerino nello spazio $\mathbf{R}^3$ le rette $r : \begin{cases} x = & 1+t \\ y = & 1-t \\ z = & 1 \end{cases}$ ed $s : \begin{cases} x+y &= 1 \\ x-y+z &= 0 \end{cases}$.
   a) Calcolare la loro distanza.
   b) Trovare le equazioni cartesiane della retta perpendicolare ad r ed s che interseca entrambe.

7. Considerare il sottospazio $W = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x + y = 0\}$ di $\mathbf{R}^3$ e il vettore $v = (1, 2, 3)$.
   a) Calcolare il vettore proiezione ortogonale di v su W.
   b) Calcolare il vettore proiezione ortogonale di v sul (sottospazio) complemento ortogonale di W in $\mathbf{R}^3$.

1. Stabilire quali delle seguenti applicazioni sono lineari.
   a) $f : \mathbf{R}^2$ in $\mathbf{R}^3$ definita da $f(x,y) = (x-y, x+y, 2x+2)$,
   b) $g : \mathbf{R}^3$ in $\mathbf{R}$ definita da $g(x,y,z) = x^2 + yz$,
   c) $h : \mathbf{R}^3$ in $\mathbf{R}^2$ definita da $h(x,y,z) = (x+y+z, 3x-5y+7z)$.

2. Si consideri l'applicazione lineare f da $\mathbf{R}^4$ in $\mathbf{R}^3$ definita da
$$f(x,y,z,t) = (\,x+2y-t,\ 2x+y+t,\ x-y+2t)$$
   a) Trovare una base di Ker$f$, una base di Imf e le loro dimensioni.
   b) Scrivere una matrice che rappresenti f.
   c) Dire se il vettore $w = (3,3,0)$ appartiene a Imf.

3. Si consideri l'applicazione lineare f di $\mathbf{R}^3$ in $\mathbf{R}_3[x]$ definita da
   $f(a,b,c) = a - c + (b-2c)x^2 + (a+b-3c)x^3$
   (a) Trovare una base di Ker$f$, una base di Imf e le loro dimensioni.
   (b) Fissate delle basi di $\mathbf{R}^3$ e di $\mathbf{R}_3[x]$, scrivere la matrice che rappresenta f rispetto a tali basi.

4. Sia $\mathbf{R}_2[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado minore o uguale di 2.
   Sia $f : \mathbf{R}_2[x] \longrightarrow \mathbf{R}^4$ l'applicazione lineare definita da $f(a+bx+cx^2) = (a-c, b+c, 0, a-kb)$.
   Trovare al variare di $k \in \mathbf{R}$, il nucleo e l'immagine di f. Precisare una base per ognuno di loro.

5. Si consideri l'applicazione lineare f di $M(2,\mathbf{R})$ in $\mathbf{R}_2[x]$ definita da
   $f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 2b - c + (c-d)x + (2b-d)x^2$
   (a) Trovare una base di Ker$f$, una base di Imf e le loro dimensioni.
   (b) Fissate delle basi di $M(2,\mathbf{R})$ e di $\mathbf{R}_2[x]$, scrivere la matrice che rappresenta f rispetto a tali basi.

6. Considerare le applicazioni lineari $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ definita da $f(x,y) = (4x+y,\ 3y,\ 2x+y)$ e $g : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ definita da $g(e_1 - e_3) = -e_3$, $g(2e_1 + e_2) = e_1 + 5e_2 - e_3$, $g(e_2 + e_3) = e_1 + 2e_2 - e_3$ dove $\{e_1, e_2, e_3\}$ é la base canonica di $\mathbf{R}^3$. Determinare la matrice rappresentativa di $g \circ f$ rispetto alle basi canoniche.

7. Sia $V = M(2,\mathbf{R})$ e $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Si consideri l'applicazione $L : V \to V$ definita da $L(B) = BA$.
   a) Dimostrare che L is è lineare.
   b) Scegliere una base di V e scrivere la matrice rappresentativa di L relativa a la base scelta.

8. Sia $M(2,\mathbf{R})$ lo spazio delle matrici reali di ordine 2. Si consideri l'applicazione lineare $T\colon M(2,\mathbf{R}) \to \mathbf{R}$, che ad ogni matrice assegna la sua traccia:
$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a + d.$$
   a) Determinare una matrice che rappresenti T.
   b) Calcolare le dimensioni di $\ker T$ e di Im T.
   c) Trovare una base per $\ker T$.

9. Sia $f : \mathbf{R^2} \to \mathbf{R^2}$ la applicazione lineare data da
$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
   Trovare la matrice rappresentativa di f rispetto alla base $\mathcal{B} = \left\{ v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ w = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$.

10. Sia $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ definita da $T(x,y) = (4x+y, 3y)$.
    Sia $\mathcal{B} = \{(1,-1); (1,0)\}$ una base di $\mathbf{R}^2$. Determinare la matrice rappresentativa di T nella base $\mathcal{B}$.

1. Considerare la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 8 & 6 & -4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 9 & 9 & -4 \end{pmatrix}$$
a) Calcolare il polinomio caratteristico e trovare gli autovalori.
b) Dire se l'endomorfismo che A rappresenta è semplice; giustificare.

2. Si consideri per ogni $t \in \mathbf{R}$ la matrice,
$$A_t = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & t & -1 \end{pmatrix}$$
a) Determinare per quali $t \in \mathbf{R}$, A_t non è diagonalizzabile.
b) Se possibile, trovare una base di $\mathbf{R}^3$ formata di autovettori di A_t per $t = 8$.

3. Si consideri l'endomorfismo f di $\mathbf{R}^3$ che soddisfa le seguenti condizioni: $V = \{(x, y, z)/x - 2y + z = 0\}$ è un autospazio di f relativo all'autovalore 2; $(0, 1, 1) \in \mathrm{Ker} f$.
a) Trovare la matrice che rappresenta f rispetto alla base canonica di $\mathbf{R^3}$
b) Dire se f è semplice giustificando la risposta.

4. Nello spazio vettoriale $\mathbf{R}^4$ si consideri il sottospazio vettoriale $U = \{(x, y, z, w)/x - z = 0,\ y + 2w = 0\}$.
a) Scrivere la matrice che rappresenta, rispetto alla base canonica di $\mathbf{R}^4$, l'endomorfismo f di $\mathbf{R}^4$ tale che $U = \mathrm{Ker}\ f$ e $W = \{(x, y, z, w)/x + z = 0,\ -2y + w = 0\}$ è l'autospazio di f relativo all'autovalore 2.
b) Dire se f è semplice. Giustificare.

5. Nello spazio vettoriale $M(2, \mathbf{R})$ delle matrici quadrate reali di 2^o ordine si consideri l'applicazione definita da $f(A) = A + A^t$.
a) Calcolare il polinomio caratteristico e trovare gli autovalori.
b) Provare che f è semplice.
c) Trovare una base rispetto a cui la matrice di f si rappresenta con una matrice diagonale.

6. Sia $V = \mathbf{R}^3$ e $\mathcal{B} = \{u, v, w\}$ una sua base. Si consideri L'applicazione f tale che u è un autovettore di autovalore $\lambda = 2$, $f(v) = u + 3v + 2w$, $f(w) = u - 2v - 2w$.
a) Stabilire se f è diagonalizzabile,
b) determinare il polinomio caratteristico,
c) calcolare $f^5(-u + v + 2w)$.

7. Sia $V = \mathbf{R}_3[x]$ e $T : V \to V$ definita da $T(p)(x) = xp'(x)$.
a) verificare che T é lineare.
b) Trovare gli autovalori e gli autovettori di T.

8. Si consideri la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
a) Calcolare il polinomio caratteristico e gli autovalori di A.
b) Dire se l'endomorfismo che A rappresenta è diagonalizzabile, giustificare.
c) Trovare una base per ogni autospazio di A.
d) Determinare se $A - I$ è iniettiva.

9. Sia $w \in \mathbf{R^3}$ e sia $f : \mathbf{R^3} \to \mathbf{R^3}$ definita da

$$f(v) = v \wedge w \ \ \forall v \in \mathbf{R^3}.$$

a) Dimostrare che f è lineare.
b) Se $w = (1, 2, -1)$, trovare la dimensione e una base di Ker$f$ e di Imf.
c) Trovare il polinomio caratteristico dell'endomorfismo f.
d) Determinare se l'endomorfismo f è semplice.

10. Considerare in $\mathbf{R^3}$ il prodotto scalare canonico. Sia $u \in \mathbf{R}^3$ un vettore di norma 1 ed f l'endomorfismo di $\mathbf{R}^3$ definito da

$$f(v) =< v, u > u \ \forall v \in \mathbf{R}^3.$$

a) Verificare che f è lineare.
b) Caratterizzare geometricamente il nucleo e l'immagine di f.
c) Trovare il polinomio caratteristico dell'endomorfismo f.
d) Verificare che l'endomorfismo f è semplice.

11. Considerare in $\mathbf{R^3}$ il prodotto scalare canonico. Siano u_1 e $u_2 \in \mathbf{R^3}$ due vettori ortogonali di norma 1 e sia $f : \mathbf{R^3} \to \mathbf{R^3}$ l'applicazione definita da

$$f(v) =< v, u_1 > u_1+ < v, u_2 > u_2 \ \ \forall v \in \mathbf{R^3}.$$

a) Caratterizzare geometricamente il nucleo e l'immagine di f.
b) Trovare gli autovalori dell'endomorfismo f.
c) Determinare se l'endomorfismo è semplice, giustificare la risposta.

1. Si consideri in $\mathbf{R}^3$ il prodotto scalare standard $<(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)>= x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3$. Scrivere la sua matrice associata relativa alla base $v_1 = (1, 1, 0)$, $v_2 = (0, 1, 1)$, $v_3 = (1, 1, 1)$.

2. Siano $v = (x_1, x_2, x_3)$ e $w = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbf{R}^3$. Determinare quali delle seguenti funzioni bilineari definiscono un prodotto scalare in $\mathbf{R}^3$.
a) $< v, w >= x_1y_2 + x_2y_1 + x_3y_3$.
b) $< v, w >= x_1y_1 + x_2y_2 + 3x_3y_3$.
c) $< v, w >= 2x_1y_1 - x_2y_2 + x_3y_3$.

3. Considerare la seguente forma bilineare in $\mathbf{R}_3[x]$: se $p, q \in \mathbf{R}^3[x]$,
$$b(p, q) = \int_0^1 p(t)q(t)dt.$$
a) Verificare che b definisce un prodotto scalare su $\mathbf{R}_3[x]$.
b) Calcolare la matrice di b relativa alla base $\{1, x, x^2, x^3\}$.
c) Applicare il processo di Gram-Schmidt alla base $\{1, x, x^2, x^3\}$.

4. Sia $\mathcal{S}$ lo spazio vettoriali delle matrici simmetriche di ordine 2. Siano $A, B \in \mathcal{S}$, definere
$$b(A, B) = \text{ traccia } AB.$$
a) Dimostrare che b definisce un prodotto scalare su $\mathcal{S}$.
b) Decidere se b definisce un prodotto scalare su $M(2, \mathbf{R})$
c) Fissata una base di $\mathcal{S}$, scrivere la matrice associata a b nella base scelta.

5. Sia $V = C_0([0, 2\pi]) = \{f : [0, 2\pi] \to \mathbf{R} \text{ continua }\}$ con il prodotto scalare $< f, g >= \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx$.
a) Dimostrare che $\sin x$ e $\cos x$ sono ortogonali.
b) Calcolare la lunghezza di $\sin x$.

6. Siano $w_1 = (1, 2, 1)$ e $w_2 = (1, -3, 2)$ vettori in $\mathbf{R}^3$. Determinare una base ortogonale $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ di $\mathbf{R}^3$ tale che sia positivamente orientata e che $\text{Span}\{w_1, w_2\} = \text{Span}\{v_1, v_2\}$.