DIARIO DELLE LEZIONI (2025)

4 marzo. Assiomi di definizione di un campo. Insieme di numeri. Insieme infiniti. Cardinalità. $|\mathbf{N}| = |\mathbf{Z}| = |\mathbf{Q}|$; $|\mathbf{R}| = |(0,1)| > |\mathbf{N}|$. Numeri complessi: Operazioni di somma e prodotto. Il coniugato. Rappresentazione geometrica dei numeri complessi. Forma trigonometrica dei numeri complessi.

7 marzo. Polinomi: somma e prodotto tra polinomi. L'insieme dei polinomi $\mathbf{K}[x]$ nella variabile indeterminata x con coefficienti nel campo $\mathbf{K}$. Principio di Euclide. Divisibilità. Teorema di Ruffini. Radici e molteplicità. Teorema fondamentale dell'algebra. Radici di un polinomio reale. Scomposizione dei polinomi complessi e reali in fattori irriducibili.

11 marzo. Radice n-esima di un numero complesso. Vettori geometrici in $\mathbf{R}^2$. Addizione di vettori e moltiplicazione per uno scalare. L'insieme $\mathbf{R}^n$ delle n-uple reali. L'insieme $\mathbf{C}^n$ delle n-uple complesse. Matrice di m righe ed n colonne. Matrice nulla, la trasposta; matrici quadrate: identità, diagonale, scalare, triangolare superiore, triangolare inferiore, simmetrica e antisimmetrica. Somma tra matrici e moltiplicazione di una matrice per uno scalare.

14 marzo. Prodotto di matrici (riga per colonna). Esempi e proprietà.
Assiomi di definizioni di uno spazio vettoriale su un campo. Unicità dell'elemento neutro e dell'opposto. Esempi: 1) Il campo $\mathbf{K}$ come $\mathbf{K}$-spazio vettoriale. 2) L'insieme $\mathbf{R}^n$ delle n-uple reali è un $\mathbf{R}$ spazio vettoriale. 3) Lo spazio $\mathbf{C}^n$ delle n-uple complesse come $\mathbf{C}$-spazio vettoriale e come $\mathbf{R}$-spazio vettoriale. 4) Lo spazio dei polinomi reali $\mathbf{R}[x]$ nella variabile x. 5) Lo spazio $M(m,n;\mathbf{R})$ delle matrici a coefficienti reali di ordine m per n.

18 marzo. Esempio 6) L'insieme V dei numeri reali strettamente positivi con le leggi di composizione interna $(x,y) \mapsto xy \;\; \forall x,y \in V$ ed esterna $(a,x) \mapsto x^a \;\; \forall x \in V \; \forall a \in \mathbf{R}$ è uno spazio vettoriale. Proprietà degli spazi vettoriali. Definizione di matrice inversa. Operazione elementari sulle righe (colonne) di una matrice. Riduzione per righe (colonne). Matrici equivalenti per righe (colonne).

21 marzo. Riduzione a scala, algoritmo di Gauss. Rango. Definizione di sottospazio vettoriale. Esempio: L'insieme V dei numeri reali strettamente positivi con le leggi di composizione interna $(x,y) \mapsto xy \;\; \forall x,y \in V$ ed esterna $(a,x) \mapsto x^a \;\; \forall a \in \mathbf{R}, \forall x \in V$ è un $\mathbf{R}$-spazio vettoriale, ma non è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}$ con le leggi usuali di somma e prodotto per uno scalare. Caratterizzazione dei sottospazi del piano ($\mathbf{R}^2$) e dello spazio ($\mathbf{R}^3$). Esempi di sottospazi di $\mathbf{R}[x]$ e di sottospazi di $M(n;\mathbf{K})$.

25 marzo. Combinazione lineare. L'insieme di tutte le combinazioni lineari (Span). Generatori, spazi finitamente generati. Spazi vettoriali finitamente generati. Indipendenza e dipendenza lineare di una collezione di vettori.

28 marzo. Base di uno spazio vettoriale finitamente generato. Componenti di un vettore relativi ai vettori di una base. Teorema dell'esistenza di una base (metodo degli scarti successivi). Lemma di Steinitz. Dimensione. Teorema del completamento ad una base.

1 aprile. Applicazioni della riduzione di matrici al calcolo della dimensione di sottospazi di uno spazio vettoriale. Esempi. La traccia di una matrice quadrata. Dimensione dello spazio vettoriale delle matrici reali di ordine 2 di traccia zero.

3 aprile. Unione, intersezione, somma, somma diretta di sottospazi vettoriali. Caratterizzazione della somma direta: $W + U = W \oplus U \Leftrightarrow W \cap U = \{0\}$. Formula di Grassmann: $\dim(W+U) + \dim(W \cap U) = \dim W + \dim U$. Corollario: $W + U = W \oplus U \Leftrightarrow \dim(W+U) = \dim W + \dim U$. Esempi sul calcolo della dimensione di sottospazi $M(\mathbf{R},2)$.

8 aprile. Determinante esplicita di una matrice quadrata di ordine n (permutazione, inversione, segno di una permutazione, formula esplicita). Definizione assiomatica del determinante. Teorema di Binet: $\det(AB) = \det A \det B$ e altre proprietà. Cofattore o complemento algebrico. Teoremi di Laplace. Applicazione: calcolo dell'inversa di una matrice. Teorema: A è invertibile se e solo se $\det A \neq 0$.

11 aprile. Calcolo della dimensione di $\mathbf{C}$ come spazio vettoriale reale ovvero complesso. Esempi sul calcolo della dimensione di sottospazi di $\mathbf{R}_2[x]$. Esempio del calcolo del determinate usando gli assiomi di definizione e lo sviluppo di Laplace. Definizione di rango di una matrice di ordine $m \times n$ usando il determinante. Equazione lineare. Sistema lineare di m equazioni in n incognite. Soluzione di un sistema lineare. Rappresentazione matriciale di un sistema lineare.

15 aprile. Teorema di Rouché-Capelli sulla risolubilità: $AX = B$ è risolubile $\Leftrightarrow$ rango A =rango $(A|B)$. Sistemi equivalenti. Sistemi ridotti. Teorema di Rouché-Capelli sulla dimensione dell'insieme delle soluzioni dei sistemi risolubili: Se $AX = B$ è risolubile allora l'insieme delle soluzioni del sistema ha $\infty^{n-\rho}$, dove n è il numero delle incognite e ρ è il rango di A. Sistemi lineari omogenei ($AX = 0$). Soluzione generale di un sistema risolubile. Sistemi lineari con incognite vettoriali. Applicazione: calcolo della matrice inversa A^{-1} di una matrice quadrata A col metodo della riduzione.

18 aprile. Regola di Cramer. Teorema: Siano A una matrice $m \times n$, $\mathcal{R}$ lo spazio generato dalle righe di A e $\mathcal{C}$ lo spazio generato dalle colonne di A allora $\dim \mathcal{R} = \dim \mathcal{C} =$ rango A. Prodotto scalare in $\mathbf{R}^n$. Norma di un vettore. Distanza tra due punti. Angolo tra due vettori. Perpendicolarità. Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz. Disuguaglianza triangolare.

29 aprile. Area del triangolo. Basi positivamente orientate. Prodotto vettoriale e prodotto misto in $\mathbf{R}^3$. Equazioni parametriche di rette nel piano e nello spazio. Equazione cartesiana di una retta nel piano ($\mathbf{R}^2$). Equazione cartesiana del piano e della retta nello spazio ($\mathbf{R}^3$). Intersezione e posizione relativa tra piani e tra retta e piano nello spazio.

6 maggio. Parallelismo e perpendicolarità tra rette, tra piani e tra retta e piano. Intersezione e posizione relativa tra rette nello spazio. Proiezione ortogonale di un vettore su una retta. Proiezione ortogonale di un vettore su un piano. Volume de un parallelepipedo.

9 maggio. Equazione del piano: passante per tre punti, che contiene due rette (parallele o incidenti), che contiene una retta e un punto esterno ad essa. Distanza fra due punti, da un punto a una retta, da un punto a un piano, tra due piani (paralleli), tra due rette (parallele o sghembe). Equazione della retta che interseca perpendicolarmente due rette sghembe.

13 maggio. Definizione di applicazione lineare. Esempi. Proprietà. Definizioni di Ker (nucleo) e Im (immagine). Caratterizzazione delle applicazioni lineari iniettive. Linearità e dipendenza/indipendenza lineare.

16 maggio. Applicazioni suriettive e biiettive. Teorema della dimensione: Sia $f : V \to W$ una applicazione lineare. Se $\dim V = n < \infty$ allora $\dim \ker f \leq n$, $\dim \mathrm{Imf} \leq n$ e $\dim \ker f + \dim \mathrm{Imf} = \dim V$. Matrice rappresentativa di una applicazione lineare fra spazi vettoriali di dimensione finita. Esempi. Matrice dell'applicazione identità in basi diverse.