SPAZI VETTORIALI

Assiomi di definizione. Uno spazio vettoriale su un campo $\mathbf{K}$ è un insieme V dove sono definite due operazioni: addizione tra elementi di V e moltiplicazione per elementi di $\mathbf{K}$ indicati con "+" e "." rispettivamente che soddisfano le seguente proprietá

1) $v+w = w+v \ \forall v, w \in V$ (commutativa)

2) $u+(v+w) = (u+v)+w \ \forall u, v, w \in V$ (associativa)

3) $\exists\, 0 \in V/0+v = v \ \forall v \in V$ (esistenza elemento neutro)

4) $\forall\, v \in V \exists u \in V/v+u = O$ e si denota $u = -v$ (esistenza elemento opposto)

5) $a.(u+v) = a.u+a.v \ \forall a \in \mathbf{K} \forall v \in V$ (distributiva)

6) $(a+b)v = a.v+b.v \ \forall a, b \in \mathbf{K} \forall v \in V$ (distributiva)

7) $(ab)v = a.(b.v) \forall a, b \in \mathbf{K} \forall v \in V$

8) $1.v = v$dove $1 \in \mathbf{K} \forall v \in V$

Esempi: $\mathbf{R}^n$, $M(n, m, \mathbf{R})$, $\mathbf{R}_n[x]$ con le operazioni di somma e prodotto per uno scalare definite prima sono spazi vettoriali sul campo $\mathbf{R}$.

SOTTOSPAZI Un insieme W dello spazio vettoriale $(V, \mathbf{K}, +, .)$ è un sottospazio vettoriale di V se con le stesse leggi di composizione di V è uno spazio vettoriale.

Teorema: $W \subset V$ è sottospazio vettoriale di V se e solo se $a) \ \forall v, w \in W \Rightarrow v + w \in W$ e
$b) \ \forall a \in \mathbf{K} \forall v \in W \Rightarrow av \in W$.

COMBINAZIONE LINEARE Un vettore $v \in V$ é combinazione lineare dei vettori $v_1, \ldots, v_k \in V$ se esistono $a_1, \ldots, a_k \in \mathbf{K}$ tale che si scrive $v = a_1 v_1 + \cdots + a_k v_k$.

INDIPENDENZA Gli elementi $v_1, \ldots, v_k$ sono detti linearmente indipendenti se $a_1 v_1 + \cdots + a_k v_k = 0$ implica $a_1 = \cdots = a_k = 0$, invece sono detti linearmente dipendenti se esistono $a_1, \ldots, a_k \in \mathbf{K}$ non tutti nulli tale che $a_1 v_1 + \cdots + a_k v_k = 0$.

Lemma: I vettori $v_1, \ldots, v_k$ sono linearmente indipendenti se e solo se ogni loro combinazione lineare si scrive in modo unico.

Dimostrazione: $\Rightarrow$) Se $a_1 v_1 + \cdots + a_k v_k = b_1 v_1 + \cdots + b_k v_k$ quindi $(a_1 - b_1)v_1 + \cdots + (a_k - b_k)v_k = 0$, siccome i vettori sono linearmente indipendenti allora $a_1 = b_1, \ldots, a_k = b_k$.

$\Leftarrow$) Se $a_1 v_1 + \cdots + a_k v_k = 0 = 0v_1 + \cdots + 0v_k$, siccome il modo di scrivere una combinazione lineare è unico allora $a_1 = 0, \ldots, a_k = 0$.

Esempio: le righe non nulle di una matrice ridotta per righe sono lineramente indipendenti.

GENERATORI L'insieme di tutte le combinazioni lineari di $v_1, \ldots, v_k$ si chiama spazio generato da $v_1, \ldots, v_k$ e si indica con $Span\{v_1, \ldots, v_k\}$. $(v \in Span\{v_1, \ldots, v_k\} \iff v = a_1 v_1 + \cdots + a_k v_k)$

Esempio: Il sottospazio generato dalle righe $R_1, \ldots, R_i, \ldots, R_j, \ldots, R_k$ di una matrice coincide col sottospazio generato da $R_1, \ldots, R_i + aR_j, \ldots, R_j, \ldots, R_k$.

$$Span\{R_1, \ldots, R_i, \ldots, R_j, \ldots, R_k\} = Span\{R_1, \ldots, R_i + aR_j, \ldots, R_j, \ldots, R_k\}$$

Teorema: $Span\{v_1, \ldots, v_k\}$ è il piú piccolo sottospazio di V che contiene $v_1, \ldots, v_k$.

cioé: 1) $v_i \in Span\{v_1, \ldots, v_k\}$, 2)$Span\{v_1, \ldots, v_k\}$ è un sottospazio vettoriale di V,

3) se $W \subset V$ è un sottospazio tale che $v_i \in W$ allora $Span\{v_1, \ldots, v_k\} \subset W$

Definizione: Sia $W \subset V$. Si dice che W è generato da $v_1, \ldots, v_k$ (o che $v_1, \ldots, v_k$ è un insieme di generattori di W) se $W = Span\{v_1, \ldots, v_k\}$.

Definizione: Sia V uno spazio vettoriale sul campo $\mathbf{K}$, se esistono $v_1, \ldots, v_k \in V$ che generano V si dice che V è finitamente generato.

BASE Sia V uno spazio vettoriale finitamente generato. Una base $\mathcal{B}$ di V è un insieme ordinato $\{v_1, \ldots, v_n\}$ di generatori di V linearmente indipendenti.

Teorema: $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ è una base di V se ogni elemento di V si scrive in modo unico nella forma $v = a_1v_1 + \cdots + a_nv_n$.

Esempio: le righe non nulle di una matrice ridotta per righe formano una base dello spazio delle righe di A e il loro numero è il rango A.

COMPONENTI Le componenti di un vettore v rispetto a una base $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ sono gli n numeri $a_1, \ldots, a_n$ tali che $v = a_1v_1 + \cdots + a_nv_n$ presi nel ordine.

Quindi fissata una base $\mathcal{B}$ si fa corrispondere al vettore $v \in V$ la n-upla $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbf{K}^n$.

Lemma: Se $V = Span\{v_1, \ldots, v_k\}$

1) allora l'insieme $\{v_1, \ldots, v_k\}$ contiene una base.

(Ogni insieme finito di generatori di V contiene una base di V)

2) se $w_1, \ldots, w_m$ sono linearmente indipendenti allora $m \leq k$.

Teorema: Due basi qualsiasi di uno spazio vettoriale hanno lo stesso numero di elementi.

DIMENSIONE Si dice dimensione di uno spazio vettoriale V al numero di elementi di una base di V.

Lemma: 1) Se $\{u_1, \ldots, u_n\}$ è una base di V e siano $w_1, \ldots, w_m$ vettori in V Allora se $m > n$, $w_1, \ldots, w_m$ sono linearmente dipendenti.

2) Se $v_1, \ldots, v_k$ sono linearmente indipendenti, allora è possibile trovare in V elementi $v_{k+1}, \ldots, v_n$ in modo che $\{v_1, \ldots, v_n\}$ sia una base di V.

(Ogni insieme di vettori linearmente indipendenti è contenuto in una base)

3) Se W è un sottospazio di V allora $\dim W \leq \dim V$.

Esempio: Sia $M(2, \mathbf{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici quadrate reali di 2^o ordine.

Le matrici $E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ generano $M(2, \mathbf{R})$ e sono linearmente indipendenti. Quindi la dimensione di $M(2, \mathbf{R})$ è 4.

Esempio: Sia $\mathbf{R}_2[x]$ lo spazio dei polinomi a coefficienti reali di grado minore o uguale a 2. I polinomi $1,\ x,\ x^2$ generano $\mathbf{R}_2[x]$ e sono linearmente indipendenti. Quindi la dimensione di $\mathbf{R}_2[x]$ è 3.

INTERSEZIONE, SOMMA, SOMMA DIRETTA

Siano U e W sottospazi dello spazio vettoriale V, gli insiemi *somma* $U + W = \{v \in V / v = u + w \ : u \in U, w \in W\}$ e *intersezione* $U \cap W = \{v \in V / v \in U$ e $v \in W\}$ sono sottospazi di V.

La somma $U + W$ è *diretta* se ogni vettore si puo scrivere in modo unico nella forma $u + w \ : u \in U, w \in W$. In tal caso si scrive $U \bigoplus W$.

Teorema (Caratterizzazione): $U + W = U \bigoplus W \Leftrightarrow U \cap W = \{0\}$.

Dimostrazione: $\Rightarrow$) $v = u + w = u' + w'$ implica $U \ni u - u' = w' - w \in W$ quindi $u - u' = w' - w = 0 \in U \cap W$.

$\Leftarrow$) Se $\exists v \neq 0 \in U \cap W$ allora il modo di scrivere v non è unico $v = v + 0 = 0 + v$.

Lemma: Se $\mathcal{B}$ è un insieme di generatori di U e $\mathcal{C}$ è un sistema di generatori di W allora $\mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ è un insieme di generatori di $U + W$.

Dimostrazione: se $u = a_1u_1 + \cdots + a_su_s$ e $w = b_1w_1 + \cdots + b_rw_r$ allora
$u + w = a_1u_1 + \cdots + a_su_s + b_1w_1 + \cdots + b_rw_r$

Teorema (Formula di Grassman): $\dim(U + W) + \dim(U \cap W) = \dim U + \dim W$.

Dimostrazione: Sia $k = \dim U \cap W$ e sia$\{v_1, \ldots, v_k\}$ una base di $U \cap W$,

completiamo la base di $U \cap W$ a una base $\{v_1, \ldots, v_k, u_{k+1}, \ldots, u_p\}$ di U, dove $p = \dim U$

completiamo la base di $U \cap W$ a una base $\{v_1, \ldots, v_k, w_{k+1}, \ldots, w_q\}$ di W, dove $q = \text{dim}W$
Basta dimostrare che $\{v_1, \ldots, v_k, u_{k+1}, \ldots, u_p, w_{k+1}, \ldots, w_q\}$ è una base di $U + W$.

Corollario: $U + W = U \bigoplus W \Leftrightarrow \text{dim}(U + W) = \text{dim}U + \text{dim}W$.

Sia A una matrice con m righe e n colonne, sia $\mathcal{R}$ lo spazio generato dalle m righe della matrice A e sia $\mathcal{C}$ lo spazio generato dalle n colonne della matrice A; notare che $\mathcal{R} \subset \mathbf{K}^n$ e $\mathcal{C} \subset \mathbf{K}^m$ allora abbiamo il seguente

Teorema: Rango A $= \text{dim}\mathcal{R} = \text{dim}\ \mathcal{C}$.

APPLICAZIONI

I) La dimensione di uno spazio vettoriale $W = Span\{v_1, \ldots, v_k\}$ è il rango della matrice che ha per righe (o per colonne) i vettori $v_1, \ldots, v_k$ (le componenti dei vettori in una base fissata).

II) $w \in Span\{v_1, \ldots, v_k\}$ se e solo se $\text{dim}Span\{v_1, \ldots, v_k\} = \text{dim}Span\{v_1, \ldots, v_k, w\}$