Q1) Sia V uno spazio vettoriale. Si consideri un insieme $\{w_1, \dots, w_n\}$ di generatori dello spazio vettoriale V.

a) La dimensione dello spazio V è uguale a n.
b) Se l'insieme $\{u_1, \dots, u_h\}$ di vettori di V è linearmente indipendente allora $h \le n$.
c) Se $0w_1 + 0w_2 = \mathbf{0}$ allora $\{w_1, w_2\}$ è linearmente indipendente.
d) Sempre che $a_1w_1 + \dots + a_nw_n = b_1w_1 + \dots + b_nw_n$ si verifica che $a_i = b_i \ \forall i = 1, \dots, n$.

Q2) Sia $A = (a_{ij})$ una matrice quadrata, la sua traccia è la somma degli elementi sulla diagonale principale ($trA = \sum a_{ii}$).

a) Per ogni matrice A e B si verifica che $tr(AB) = tr(BA)$
b) Per ogni matrice A, si ha che $trA = tr(P^{-1}AP)$, per una qualsiasi matrice invertibile P.
c) Per ogni matrice invertibile A si ha $trA = trA^{-1}$
d) Per ogni matrice A e B si ha che $AB - BA \neq I$

Q3) Siano $r = \begin{cases} -y + z &= 1 \\ 2x + 2y - z &= 0 \end{cases}$ ed $s = \begin{cases} x &= 2t + 1 \\ y &= t + 2 \\ z &= 1 \end{cases}$ due rette nello spazio.

a) Le rette r ed s sono sghembe.
b) Esistono infiniti piani paralleli ad entrambe le rette.
c) Esiste un unico piano perpendicolare ad entrambe le rette.
d) Il piano di equazione $-x + 2y - z = 1$ è equidistante alle rette r ed s.

Q4) Si consideri in $V = \mathbf{R}^3$ il prodotto scalare standard e il prodotto vettoriale.

a) Per ogni $u, v, w \in V$ vale $(u \wedge v) \wedge w = u \wedge (v \wedge w)$.
b) Per ogni $u, v, w \in V$ vale $\langle u, v \wedge w \rangle = \langle v, w \wedge u \rangle = \langle w, u \wedge v \rangle$.
c) Se $\langle u, v \wedge w \rangle \neq 0$ allora $\{u,\ v,\ w\}$ è un insieme linearmente indipendente.
d) $(v + w) \wedge (v - w) = 0$ qualsiasi siano v e $w \in V$.

Q5) Si considerino una matrice quadrata A di ordine n e un vettore colonna $B \neq \mathbf{0}$.

a) Se il rango di A è minore di n allora il sistema $AX = 0$ ammette soluzioni non nulle.
b) Siano Z una soluzione del sistema $AX = 0$ e Y una soluzioni del sistema $AX = B$ allora $Z + Y$ è una soluzioni del sistema $AX = B$.
c) Se Z e Y sono soluzioni del sistema $AX = B$ allora $Z + Y$ è una soluzioni del sistema $AX = B$.
d) Se $\det A = 0$ allora esiste una matrice quadrata C non nulla tale che AC è la matrice nulla.

Q6) Sia $V = \mathbf{R}^n$ e siano $A = (a_{ij})$ una matrice reale di ordine n e $A^t = (a_{ji})$ la matrice trasposta di A.

a) $\mathbf{R}^n = \ker A \oplus \operatorname{Im} A^t$.
b) Il nucleo di A^tA coincide con il nucleo di A (cioè $\ker(A^tA) = \ker A$).
c) L'imagine di A^tA coincide con l'imagine di A^t (cioè $\operatorname{Im}(A^tA) = \operatorname{Im} A^t$).
d) Vale sempre che $AA^t = A^tA$.

Q1) Sia V uno spazio vettoriale. Si consideri un insieme $\{u_1, \dots, u_n\}$ di vettori di V linearmente indipendente.

a) La dimensione dello spazio vettoriale V è uguale a n.
b) Se $\{w_1, \dots, w_k\}$ è un insieme di generatori dello spazio vettoriale V allora $k \geq n$.
c) Sia $\mathbf{0}$ l'elemento neutro di V allora l'insieme $\{\mathbf{0}, u_1, \dots, u_n, \mathbf{0}\}$ è linearmente indipendente.
d) Sempre che $a_1u_1 + \dots + a_nu_n = b_1u_1 + \dots + b_nu_n$ si ha che $a_i = b_i \ \forall i = 1, \dots, n$.

Q2) Siano A e B matrici quadrate di ordine n.

a) Il rango di BA è minore o uguale al minimo tra al rango di A e il rango di B.
b) Se il rango di A^2 è pari al rango di A allora $A^2 = A$.
c) Per ogni matrice A e B invertibili $(A + B) = A^2 + 2AB + B^2$.
d) Per ogni matrice A si verifica che $A^2 - I = (A - I)(A + I)$

Q3) Siano V e W due spazi vettoriali tali che $\dim V = n < m = \dim W$. Sia $f : V \to W$ una applicazione lineare.

a) Se $\{v_1, \dots, v_n\}$ è una base di V allora $\dim \mathrm{Span}\{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$ è uguale a n.
b) La dimensione del nucleo $\dim \ker f$ è uguale a $m - \dim \mathrm{Im} f$.
c) Per ogni vettore $w \in W$ esiste al meno un vettore $v \in V$ tale che $f(v) = w$.
d) Se $\dim \mathrm{Im} f = n$ e $f(v) = 0_W$ allora $v = 0_V$.

Q4) Siano $(V, <,>)$ uno spazio metrico, U e W due sottospazi vettoriali di V e siano $U^\perp$ e $W^\perp$ i rispettivi sottospazi ortogonali.

a) Se $U \subset W$ allora $W^\perp \subset U^\perp$.
b) $(U \cap W)^\perp = U^\perp + W^\perp$.
c) La somma $W \oplus W^\perp$ è diretta e la sua dimensione è uguale alla dimensione di V.
d) I sottospazi W e $W^\perp$ hanno la stessa dimensione.

Q5) Siano $1 \leq n = m + 1$. Sia A una matrice $m \times n$ e sia $B \in \mathbf{R}^m$. Sia A' la matrice $m \times (n + 1)$ ottenuta aggiungendo la colonna B alla matrice A. Si consideri il sistema $AX = B$, per $X \in \mathbf{R}^n$.

a) Se il rango di A è pari a m, allora esistono infinite soluzioni del sistema.
b) Se il rango della matrice A' è massimo, il sistema ammette almeno una soluzione.
c) Se il rango di A è minore di m allora l'insieme delle soluzioni è vuoto.
d) Se le righe $A_1, \dots, A_m$ di A sono linearmente indipendenti il sistema ammette esattamente una soluzione.

Q6) Si consideri in $V = \mathbf{R}^3$ il prodotto scalare standard. Siano $u,\ v,\ w \in V$ tre vettori non nulli.

a) Se l'insieme $\{u,\ v,\ w\}$ è ortononale allora $\|u + v + w\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + \|w\|^2$.
b) Se $u,\ v,\ w$ sono tali che $< u, v >=< v, w >=< w, u >= 0$ allora $\mathrm{span}\{u, v, w\} = V$.
c) La proiezione ortogonale di w su v è il vettore nullo se e solo se $< v, w >= 0$.
d) Se $< u, v >= 0$ allora $(\mathrm{span}\{u\})^\perp \cap (\mathrm{Span}\{u\})^\perp = \{0\}$.

Q1) Sia V uno spazio vettoriale. Si consideri un insieme $\{v_1, v_2\}$ di vettori di V linearmente indipendente.
a) L'insieme $\{v_1 + v_2\}$ è linearmente indipendente.
b) La dimensione del sottospazio vettoriale $\text{Span}\{v_1 - v_2, v_1 + v_2\}$ è uguale a 2.
c) Sia $\mathbf{0}$ l'elemento neutro di V allora l'insieme di vettori $\{\mathbf{0}, v_1 - v_2, v_1 + v_2\}$ è linearmente indipendente.

Q2) Sia $V = M(2, \mathbf{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici di ordine 2 a coefficienti reali.
a) L'insieme $\{A \in V \text{tale che } \det A = 0\}$ è un sottospazio vettoriale di V.
b) L'insieme $\{A \in V \text{tale che } \det A = 1\}$ è un sottospazio vettoriale di V.
c) L'insieme $\{A \in V \text{tale che traccia} A = 0\}$ è un sottospazio vettoriale di V.

Q3) Siano V e W due spazi vettoriali tali che $\dim V = n > m = \dim W$. Sia $f : V \to W$ una applicazione lineare.
a) Per ogni vettore $w \in W$ esiste al meno un vettore $v \in V$ tale che $f(v) = w$.
b) Se $f(v) = 0_W$ allora $v = 0_V$.
c) Se $\{v_1, \ldots, v_n\}$ è una base di V allora $\text{Im} f = \text{Span}\{f(v_1), \ldots, f(v_n)\}$.

Q4) Siano $(V, <, >)$ uno spazio metrico, U e W due sottospazi vettoriali di V e siano $U^\perp$ e $W^\perp$ i rispettivi sottospazi ortogonali.
a) Se $U \subset W$ allora $U^\perp \subset W^\perp$.
b) $(U + W)^\perp = U^\perp \cap W^\perp$.
c) I sottospazi $W + W^\perp$ e $U + U^\perp$ hanno la stessa dimensione.

Q5) Siano $1 \leq n = m + 1$. Sia A una matrice $m \times n$ e sia $B \in \mathbf{R}^m$. Sia A' la matrice $m \times (n + 1)$ ottenuta aggiungendo la colonna B alla matrice A. Si consideri il sistema $AX = B$, per $X \in \mathbf{R}^n$.
a) Se il rango di A è pari a m, allora esistono infinite soluzioni del sistema.
b) Se il rango della matrice A' è massimo, il sistema ammette almeno una soluzione.
c) Se B è combinazione lineare delle colonne $A^1, \ldots, A^n$ di A allora il sistema ammette esattamente una soluzione.

Q6) Si consideri in $V = \mathbf{R}^3$ il prodotto scalare $< (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) >= x_1 x_2 + 2y_1 y_2 + 3z_1 z_2$. Si considerino i vettori $v = (1, 1, 1)$ e $w = (1, 1, -1)$
a) La norma del vettore v è $\sqrt{3}$.
b) I vettori v e w sono ortogonali.
c) La proiezione ortogonale di w nella direzione di v è il vettore nullo.

Q1) Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n.
a) Se $\{u_1, \ldots, u_h\}$ è un insieme di vettori di V linearmente indipendente allora $h \leq n$.
b) Se $\{w_1, \ldots, w_k\}$ è un insieme di generatori dello spazio vettoriale V allora $k \geq n$.
c) Sia $\{w_1, \ldots, w_k\}$ è un insieme di generatori di V, se l'elemento neutro $\mathbf{0} = a_1 w_1 + \ldots + a_k w_k$ sempre si ha che $a_i = 0 \; \forall i = 1, \ldots, k$.

Q2) Siano A e B matrici quadrate di ordine n.
a) Per ogni matrice A e B si ha che $\text{traccia}(BA) = \text{traccia}(AB)$
b) Per ogni matrice A e B si ha che $\det(A + B) = \det A + \det B$.
c) Per ogni matrice A e B si ha che $\text{traccia}(A + B) = \text{traccia}A + \text{traccia}B$.

Q3) Siano V e W due spazi vettoriali, $f : V \to W$ una applicazione lineare e A una sua matrice rappresentativa.
a) Le colonne $A^1, \ldots, A^m$ della matrice A generano l'imagine $(\operatorname{Im} f)$ di f.
b) Le righe $A_1, \ldots, A_m$ della matrice A generano il nucleo $(\ker f)$ di f.
c) Se $f(v) = 0_W$ implica che $v = 0_V$ allora $\dim \operatorname{Im} f = n$.

Q4) Siano V uno spazio vettoriali su un campo $\mathbf{K}$ ed $f : V \to V$ una applicazione lineare.
a) Se la somma delle molteplicità geometriche e pari al grado del polinomio caratteristico allora l'endomorfsmo è diagonalizabile.
b) Se f è diagonalizzabile allora $V = \ker f \oplus \operatorname{Im} f$
c) Se $\lambda \in \mathbf{K}$ è un autovettore di f allora l'applicazione $f - \lambda(\text{id})$ è iniettiva.

Q5) Si consideri in $V = \mathbf{R}^3$ il prodotto scalare standard $<,>$ e il prodotto vettoriale $\wedge$. Siano $u,\ v,\ w \in V$ tre vettori non nulli.
a) Se $< u,\ v \wedge w > \neq 0$ allora esistono $a, b \in \mathbf{R}$ tali che $u = av + bw$.
b) Se $< v, w >= 0$ allora $v \wedge w \neq \mathbf{0}$.
c) Se $v \wedge w = \mathbf{0}$ allora $< v, w > \neq 0$.

Q6) Sia A una matrice $m \times n$ e sia $B \in \mathbf{R}^m$. Sia A' la matrice $m \times (n+1)$ ottenuta aggiungendo la colonna B alla matrice A. Si consideri il sistema $AX = B$, per $X \in \mathbf{R}^n$.
a) Se $\text{rango}A = \text{rango}A'$ allora $B \in \text{Span}\{A^1, \ldots, A^n\}$, dove $A^1, \ldots, A^n$ denotano le colonne della matrice A.
b) Se $n = m$ la colonna B è quasi sempre soluzione del sistema.
c) Se $\text{rango}A = \text{rango}A'$ è minore del minimo tra m ed n allora l'insieme delle soluzioni è vuoto.

Q1) Sia $\{u,\ v,\ w\}$ una base dello spazio vettoriale V.
a) L'insieme $\{u-v, v-w, w-u\}$ è una base di V.
b) $\{0,\ u,\ v,\ w\}$ è un insieme di generatori dello spazio vettoriale V.
c) L'insieme $\{u-v+w\}$ è linearmente indipendente.

Q2) Siano A e B matrici quadrate di ordine n e sia I la matrice identità.
a) Se $\det(AB) = 0$ allora $\det A = \det B = 0$.
b) Se $\det(AB) = \det B$ allora $A = I$.
c) Per ogni matrice A si ha che $\det(\alpha A) = \alpha^n \det A$.

Q3) Siano V uno spazio vettoriali su un campo $\mathbf{K}$ ed $f : V \to V$ una applicazione lineare.
a) Se f è diagonalizzabile allora $V = \ker f \oplus \operatorname{Im} f$
b) Per ogni $\lambda \in \mathbf{K}$ l'applicazione $f - \lambda(id)$ é iniettiva.
c) Se la somma delle molteplicità geometriche e pari al grado del polinomio caratteristico allora l'endomorfsmo è diagonalizzabile.

Q4) Siano V e W due spazi vettoriali di dimensione finita. Sia $f : V \to W$ una applicazione lineare.
a) Se $\dim \ker f = 0$ allora $\dim \operatorname{Im} f = \dim W$.
b) $\dim \ker f$ è sempre minore o uguale di $\dim W$.
c) $\dim \operatorname{Im} f$ è sempre minore o uguale di $\dim V$.

Q5) Si consideri il sistema $AX = B$, dove A è una matrice quadrata di ordine n.
a) Se $\det A = 0$ allora il sistema $AX = 0$ ammette soluzioni non nulle.
b) Se $\det A \neq 0$ allora l'insieme delle soluzioni del sistema $AX = 0$ è vuoto.
c) Sia $B \neq \mathbf{0}$, se Z e Y sono soluzioni del sistema allora anche $Z + Y$ è soluzione.

Q6) Siano $(V, <,>)$ uno spazio metrico, W un suo sottospazio e $W^\perp$ il sottospazio ortogonale a W.
a) L'insieme $W \cap W^\perp$ è vuoto.
b) Il sottospazio ortogonale $V^\perp$ di V è l'insieme $\{0_V\}$.
c) Per ogni $u, w \in V$ vale $\|u - w\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2$.

Q1) Sia V uno spazio vettoriale di dim 2. Si consideri un insieme $\{v_1, v_2\}$ di vettori di V linearmente indipendente.
a) L'insieme $\{v_1 + v_2\}$ è una base di V.
b) La dimensione del sottospazio vettoriale $\text{Span}\{v_1,\ v_2,\ v_1 + v_2\}$ è uguale a 3.
c) Sia $\mathbf{0}$ l'elemento neutro di V allora l'insieme di vettori $\{\mathbf{0}, v_1, v_2\}$ è linearmente dipendente.

Q2) Siano A e B matrici quadrate di ordine n.
a) Per ogni matrice A e B si ha che traccia $(AB - BA) = 0$
b) Per ogni matrice A e B si ha che $\det(AB) = \det(BA)$.
c) Se $AB = BA = 0$ allora si ha che $A = 0$ oppure $B = 0$.

Q3) Siano V e W due spazi vettoriali tali che $\dim V = n$ e $\dim W = m$. Sia $f : V \to W$ una applicazione lineare.
a) Se $\{v_1, \ldots, v_n\}$ è una base di V allora $\text{Span}\{f(v_1), \ldots, f(v_n)\} = W$.
b) La dimensione del nucleo di f $(\dim \ker f)$ è uguale a $m - \dim \text{Im} f$.
c) Se $\dim \text{Im} f = n$ e $f(v) = 0_W$ allora $v = 0_V$.

Q4) Siano V uno spazio vettoriali su un campo $\mathbf{K}$ ed $f : V \to V$ una applicazione lineare.
a) Se $v \in V$ è autovettore di f allora v è diverso da zero.
b) Se f è diagonalizzabile allora gli autovalori sono distinti a due a due.
c) Se $\lambda \in \mathbf{K}$ è autovalore di f allora λ è diverso da zero.

Q5) Sia A una matrice di ordine n e sia $B \in \mathbf{R}^n$. Sia A' la matrice $n \times (n+1)$ ottenuta aggiungendo la colonna B alla matrice A. Si consideri il sistema $AX = B$, per $X \in \mathbf{R}^n$.
a) Se il rango di A è pari a n, allora i sistema ammette soluzione e la soluzione è unica.
b) Se $B \neq \mathbf{0}$ allora $\mathbf{0}$ non è soluzione del sistema.
c) Se l'insieme delle soluzioni del sistema è vuoto allora il rango di A è minore di n.

Q6) Siano $r = \begin{cases} x + y + z &= 0 \\ x + 2z &= 1 \end{cases}$ ed $s = \begin{cases} x &= 1 - t \\ y &= t - 1 \\ z &= t \end{cases}$ due rette nello spazio.
a) Le rette r ed s sono perpendicolari.
b) Esistono infiniti piani paralleli ad entrambe le rette.
c) Esistono infinite rette perpendicolari ad entrambe le rette date.

Q1) Sia V uno spazio vettoriale. Si consideri un insieme $\{u_1, \dots, u_h\}$ di vettori di V linearmente indipendente.
a) La dimensione dello spazio vettoriale V è uguale a h.
b) Se $\{w_1, \dots, w_k\}$ è un insieme di generatori dello spazio vettoriale V allora $k \geq h$.
c) L'insieme $\{u_1 + \ldots + u_h\}$ è linearmente indipendente.

Q2) Sia V lo spazio vettoriale delle matrici reali di ordine 2.
a) L'insieme $\{A \in V \text{tale che } \det A = 0\}$ è un sottospazio vettoriale di V.
b) L'insieme $\{A \in V \text{tale che } A + A^t = 0\}$ è un sottospazio vettoriale di V.
c) L'insieme $\{A \in V \text{tale che traccia} A = 1\}$ è un sottospazio vettoriale di V.

Q3) Siano A e P matrici quadrate di ordine n tali che P è invertibile e P^t denota la trasposta di P. Si consideri la matrice $B = P^t AP$
a) È sempre vero che $\det A = \det B$.
b) È sempre vero che $\det(AB) \geq 0$.
c) Vale sempre che traccia $B =$ traccia A.

Q4) Si consideri un endomorfismo f di $\mathbf{R}^3$ che soddisfa le seguente condizioni: 2 è un autovalore di f tale che il suo autospazio ha dimensione 2 e inoltre f non è iniettivo.
a) L'applicazione $f - 2(id)$ é iniettiva.
b) $\vec{0}$ è un autovettore relativo all'autovalore 0.
c) $\mathbf{R}^3$ ha una base i cui elementi sono autovettori dell'endomorfismo f.

Q3) Siano V e W due spazi vettoriali tali che $\dim V = n < m = \dim W$. Sia $f : V \to W$ una applicazione lineare.
a) Se $\dim \ker f = 0$ allora $\dim \operatorname{Im} f = \dim W$.
b) Per ogni vettore $w \in W$ esiste al meno un vettore $v \in V$ tale che $f(v) = w$.
c) Se $\dim \operatorname{Im} f = n$ e $f(v) = 0_W$ allora $v = 0_V$.

Q6) Siano $1 \leq n = m + 1$. Sia A una matrice $m \times n$ e sia $B \in \mathbf{R}^m$. Sia A' la matrice $m \times (n + 1)$ ottenuta aggiungendo la colonna B alla matrice A. Si consideri il sistema $AX = B$, per $X \in \mathbf{R}^n$.
a) Se il rango di A è pari a m, allora esistono infinite soluzioni del sistema.
b) Se il rango della matrice A' è massimo, il sistema ammette almeno una soluzione.
c) Se Z e Y sono soluzioni del sistema allora $Z + Y$ è sempre soluzione.

Q1) Sia V uno spazio vettoriale. Si consideri un insieme $\{v_1, v_2, v_3\}$ di vettori di V linearmente indipendente.

a) L'insieme $\{v_1 + v_2\}$ è linearmente indipendente.

b) La dimensione del sottospazio vettoriale $\text{Span}\{v_1 - v_2, v_1 + v_2\}$ è uguale a 2.

c) Sia $\vec{0}$ l'elemento neutro di V allora l'insieme di vettori $\{\vec{0}, v_1 - v_2, v_1 + v_2\}$ è linearmente indipendente.

Q2) Sia V lo spazio vettoriale delle matrici reali di ordine 2.

a) L'applicazione che ad ogni matrice $A \in V$ assegna il numero $\det A$ è lineare.

b) L'applicazione che ad ogni matrice $A \in V$ assegna il numero traccia A è lineare.

c) L'insieme $\{A \in V \text{tale che traccia } A = \det A\}$ è un sottospazio vettoriale di V.

Q3) Siano A e B due matrici quadrate di ordine n tali che esiste una matrice P invertibile che soddisfa $B = P^{-1}AP$.

a) È vero che $\det A = \det B$.

b) È vero che traccia $B =$ traccia A.

c) In questo caso è vero che $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

Q4) Si consideri l'endomorfismo f di $\mathbf{R}^3$ definito da $f(v) = v \wedge w$, dove w é un vettore di norma 1.

a) Il $\ker f$ è la retta parallela al vettore w.

b Il vettore w è un autovettore del'endomorfismo.

c) L'applicazione f é suriettiva.

Q5) Cosiderare la retta $r = \begin{cases} x + y + z & = 0 \\ x + 2y & = 1 \end{cases}$ e il punto $P = (1, 2, 0)$ nello spazio.

a) Il piano di equazione $3x + 4y + 2z = 1$ contiene la retta r.

b) Esistono infiniti piani paralleli a la retta r passante per il punto P.

c) Esistono infinite rette perpendicolari a la retta r passante per il punto P.

Q6) Sia $n \geq 1$ e $m = n + 1$. Sia A una matrice $m \times n$ e sia $B \in \mathbf{R}^m$. Sia A' la matrice $m \times (n + 1)$ ottenuta aggiungendo la colonna B alla matrice A. Si consideri il sistema $AX = B$, per $X \in \mathbf{R}^n$.

a) Se rango $A =$ rango A' allora $B \in \text{Span}\{A^1, \ldots, A^n\}$, dove $A^1, \ldots, A^n$ denotano le colonne della matrice A.

b) Se $\det A' \neq 0$, la colonna B è quasi sempre soluzione del sistema.

c) Se le colonne $A^1, \ldots, A^n$ di A sono linearmente indipendenti il sistema ammette almeno una soluzione.

Q1) Sia V uno spazio vettoriale, e siano u, v, w, vettori di V.

a) Se l'insieme $\{u, v, w\}$ è LI (linearmente indipendente), allora $\{u + v,\ u + v - w,\ u + 3v\}$ è LI.

b) Se l'insieme $\{u,\ v,\ w\}$ è LI e $\dim V = 3$ allora $\operatorname{Span}\{u + v,\ u + v - w,\ u + 3v\} = V$.

c) Se u, v, w sono tali che $0u + 0v + 0w = \vec{0}$, allora $\{u,\ v,\ w\}$ è LI.

Q2) Siano A e B matrici quadrate di ordine n.

a) È sempre vero che $\det(AB)^t = \det(BA)^t$.

b) Per ogni $\alpha \in \mathbf{R}$ è vero che $\det(\alpha A) = \alpha \det(A)$.

c) Vale sempre che traccia $A^{-1} = -$traccia A.

Q3) Siano V e W due spazi vettoriali di dimensione n ed m rispettivamente, e sia $f : V \to W$ una applicazione lineare.

a) Se $\{v_1, \ldots, v_n\}$ è una base di V allora $\dim \operatorname{Span}\{f(v_1), \ldots, f(v_n)\}$ è uguale a n.

b) La dimensione del nucleo $\dim \ker f$ è uguale a $m - \dim \operatorname{Im} f$.

d) Se $\dim \operatorname{Im} f = n$ e $f(v) = 0_W$ allora $v = 0_V$.

Q4) Si consideri in $V = \mathbf{R}^3$ il prodotto scalare standard $<,>$ e il prodotto vettoriale $\wedge$. Siano $u,\ v,\ w \in V$ tre vettori non nulli.

a) Se $< u,\ v \wedge w > \neq 0$ allora esistono $a, b \in \mathbf{R}$ tali che $u = av + bw$.

b) Se $< v, w >= 0$ allora $v \wedge w \neq \mathbf{0}$.

c) È sempre vero $(u \wedge v) \wedge w = u \wedge (v \wedge w)$.

Q5) Sia A una matrice $m \times n$ e sia $B \in \mathbf{R}^m$. Sia A' la matrice $m \times (n + 1)$ ottenuta aggiungendo la colonna B alla matrice A. Si consideri il sistema $AX = B$, per $X \in \mathbf{R}^n$.

a) Se le colonne $A^1, \ldots, A^n$ di A sono linearmente indipendenti allora B è soluzioni del sistema.

b) Se il rango di A è pari al rango di A' il sistema ammette almeno una soluzione.

c) Se $B = \vec{0}$ e se Z e Y sono soluzioni del sistema allora $Z + Y$ è sempre soluzione.

Q6) Siano V uno spazio vettoriali su un campo $\mathbf{K}$ e T un endomorfismo tale che $T^2 = id$.

a) L'applicazione T è iniettiva.

b) Per ogni $\lambda \in \mathbf{K}$ l'applicazione $f - \lambda(id)$ é iniettiva.

c) L'imagine di T è contenuta nel nucleo di T.

Q1) Sia V uno spazio vettoriale su un campo $\mathbf{K}$. Siano u, v, w vettori non nulli appartenenti a V.

a) La dimensione dello spazio vettoriale $\text{Span}\{u, v, w\}$ è uguale a 3.

b) Se l'insieme $\{v, w\}$ è linearmente dipendente allora esiste $\alpha \in \mathbf{K}$ such that $w = \alpha v$.

c) L'insieme $\{u\}$ è linearmente indipendente.

Q2) Siano A e B matrici quadrate di ordine n. Denota con A^t la trasposta di A.

a) È sempre vero che $\text{traccia}(AB)^t = \text{traccia}(BA)^t$.

b) Per ogni $\alpha \in \mathbf{R}$ è vero che $\det(\alpha A) = (\alpha)^n \det(A)$.

c) È sempre vero che se $AB = \mathbf{0}$ allora $A = \mathbf{0}$ oppure $B = \mathbf{0}$.

Q3) Siano V e W due spazi vettoriali tali che $\dim V = n < m = \dim W$. Sia $f : V \to W$ una applicazione lineare.

a) Se $\dim \ker f = 0$ allora $\dim \operatorname{Im} f = \dim W$.

b) Per ogni vettore $w \in W$ esiste al meno un vettore $v \in V$ tale che $f(v) = w$.

c) Se $\dim \operatorname{Im} f = n$ e $f(v) = f(u)$ allora $v = u$.

Q4) Si consideri in $V = \mathbf{R}^3$ il prodotto scalare standard $<,>$ e il prodotto vettoriale $\wedge$. Siano $u,\ v,\ w \in V$ tre vettori non nulli.

a) Se $< u,\ v \wedge w >= 0$ allora esistono $a, b \in \mathbf{R}$ tali che $u = av + bw$.

b) Se $v \wedge w \neq \vec{0}$ allora $< v, w >= 0$.

c) Se $v \wedge w = \vec{0}$ allora $< v, w >\neq 0$.

Q5) Siano $1 \leq m = n + 1$. Sia A una matrice $m \times n$ e sia $B \in \mathbf{R}^m$. Sia A' la matrice $m \times (n + 1)$ ottenuta aggiungendo la colonna B alla matrice A. Si consideri il sistema $AX = B$, per $X \in \mathbf{R}^n$.

a) Se il rango di A è n allora esiste una unica soluzioni del sistema.

b) Se $\det A' = 0$ il sistema ammette almeno una soluzione.

c) Se Z è soluzione del sistema omogeneo e Y è soluzioni del sistema $AX = B$ allora anche $Z + Y$ è soluzione del sistema $AX = B$.

Q6) Siano V uno spazio vettoriali su un campo $\mathbf{K}$ e T un endomorfismo tale che $T^2 = T$.

a) L'applicazione T è iniettiva.

b) I numeri 0 e 1 sono gli unici autovalori di T.

c) È vero che $\operatorname{Im} T \oplus \ker T = V$.

Q1) Sia V uno spazio vettoriale. Si consideri un insieme $\{v_1, v_2, v_3\}$ di vettori di V linearmente indipendente.
a) L'insieme $\{v_1 + v_2 + v_3\}$ è linearmente dipendente.
b) L'insieme $\{v_1 + v_2 + v_3, v_2 + v_3\}$ è linearmente indipendente.
c) Ll'insieme $\{v_1 + v_2 + v_3, v_2 + v_3, \vec{0}\}$ è linearmente dipendente.

Q2) Siano A e B matrici quadrate di ordine n. Denota con A^t la trasposta di A e A^{-1} denota l'inversa di A .
a) È sempre vero che traccia$(AB)^t$ = traccia$(BA)^t$.
b) Per ogni $\alpha \in \mathbf{R}$ è vero che $\det(\alpha A) = (\alpha)^n \det(A)$.
c) È sempre vero che $\det(AB)^t = \det(BA)^{-1}$.

Q3) Siano V e W due spazi vettoriali tali che $\dim V = n > m = \dim W$. Sia $f : V \to W$ una applicazione lineare.
a) L'applicazione f non é mai innietiva.
b) L'applicazione f non é mai suriettiva.
c) Se $\dim \ker f = 0$ allora $\dim \operatorname{Im} f = m$.

Q4) Si consideri in $V = \mathbf{R}^3$ il prodotto scalare standard $<,>$ e il prodotto vettoriale $\wedge$. Siano $u,\ v,\ w \in V$ tre vettori non nulli.
a) Se $< u,\ v \wedge w >= 0$ allora esistono $a, b \in \mathbf{R}$ tali che $u = av + bw$.
b) Se $< v, w >= 0$ allora $v \wedge w \neq \vec{0}$.
c) Se $v \wedge w \neq \vec{0}$ allora $< v, w >= 0$.

Q5) Sia A una matrice $m \times n$ e sia $B \in \mathbf{R}^m$. Sia A' la matrice $m \times (n + 1)$ ottenuta aggiungendo la colonna B alla matrice A. Si consideri il sistema $AX = B$, per $X \in \mathbf{R}^n$.
a) Se le colonne $A^1, \ldots, A^n, B$ di A' sono linearmente dipendenti allora B è soluzioni del sistema.
b) Se il rango di A è pari al rango di A' il sistema ammette infinite soluzioni.
c) Se $B = \vec{0}$ e se Z e Y sono soluzioni del sistema allora $Z + Y$ è sempre soluzione.

Q6) Siano V uno spazio vettoriali su un campo $\mathbf{K}$ e T un endomorfismo tale che $T^2 = 0$.
a) Se λ è un autovalore di T allora $\lambda = 0$.
b) L'applicazione T è iniettiva.
c) Per ogni $\lambda \neq 0$ l'applicazione $T - \lambda(id)$ é iniettiva.

VI Appello – GEOMETRIA Roma, 1 marzo 2018

Q1) Sia V uno spazio vettoriale. Si consideri un insieme $\{v_1, v_2, v_3\}$ di vettori di V linearmente indipendente.

a) L'insieme $\text{Span}\{v_1 + v_2 + v_3\}$ ha dimensione 1.

b) L'insieme $\{v_1 + v_2 + v_3, v_2 + v_3\}$ è linearmente indipendente.

c) L'insieme $(\text{Span}\{v_1 + v_2 + v_3, v_2 + v_3, \vec{0}\}$ ha dimensione 3.

Q2) Sia V lo spazio vettoriale delle matrici reali di ordine 2.

a) L'insieme $\{A \in V \text{tale che } \det A = 0\}$ è un sottospazio vettoriale di V.

b) L'insieme $\{A \in V \text{tale che } A + A^t = 0\}$ è un sottospazio vettoriale di V.

c) L'applicazione che ad $A \in V$ assegna il numero $\det A$ è lineare.

Q3) Siano V e W due spazi vettoriali tali che $\dim V = n < m = \dim W$. Sia $f : V \to W$ una applicazione lineare.

a) L'applicazione f non é mai inniettiva.

b) L'applicazione f non é mai suriettiva.

c) Se $\dim \ker f = 0$ allora $\dim \text{Im} f = m$.

Q4) Si consideri in $\mathbf{R}^3$ il prodotto scalare standard $<, >$ e il prodotto vettoriale $\wedge$. Siano $u,\ v,\ w \in V$ tre vettori non nulli.

a) Se l'insieme $\{u, v\}$ è linearmente indipendente allora $(\text{Span}\{u, v, u \wedge v\}) = \mathbf{R}^3$.

b) Se $< v, w >= 0$ allora $v \wedge w \neq \vec{0}$.

c) Se $< u, v >= 0$ allora $(\text{Span}\{u\})^{\perp} \cap (\text{Span}\{v\})^{\perp} = \{0\}$.

Q5) Sia A una matrice $m \times n$ e sia $B \in \mathbf{R}^m$. Sia A' la matrice $m \times (n + 1)$ ottenuta aggiungendo la colonna B alla matrice A. Si consideri il sistema $AX = B$, per $X \in \mathbf{R}^n$.

a) Se le colonne $A^1, \ldots, A^n, B$ di A' sono linearmente dipendenti allora il sistema ammette soluzioni.

b) Se il rango di A è pari al rango di A' allora B è soluzioni del sistema.

c) Se Z e Y sono soluzioni del sistema allora $Z + Y$ è sempre soluzione.

Q6) Cosiderare la retta $r = \begin{cases} x + y + z &= 0 \\ x + 2y &= 1 \end{cases}$ e il piano α di equazione $-2x + y + z = 3$.

a) La retta r è parallela al piano α.

b) La retta r è perpendicolare al piano α.

c) Esistono infiniti piani perpendicolari al piano α che contengono la retta r.
