1) Nel riferimento cartesiano RC(O,x,y,z) si considerino le rette r: x = 1+t, y = 1-t, z = 3; ed s: x+y-1=0, x-y+z=0.
a)Stabilire se le rette r ed s sono complanari o sghembe.
b)Determinare un'equazione del piano ad esse parallelo ed equidistante da entrambe.

2)Sia f l'endomorfismo di R^3 definito da:

$$f(e_1) = 2e_2 + 3e_3, f(e_2) = 2e_1 - 5e_2 - 8e_3, f(e_3) = -e_1 + 4e_2 + 6e_3;$$

dove $\{e_1, e_2, e_3\}$ è la base canonica di R^3, e sia g = f^2.
a) Trovare una base dell'autospazio V di f relativo all'autovalore 1 e dell'autospazio W di g relativo all'autovalore -1;
b) Stabilire se $V \oplus W$ =R^3.

3) Data la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

a) trovare base e dimensione di ker(M);
b) stabilire, giustificando la risposta, se 0 è autovalore di M.

Soluzioni

1) L'equazione di r è in forma parametrica (x,y,z) = t(1,-1,0)+ (1,1,3), quindi il vettore $\overrightarrow{r} = (1, -1, 0)$ è un vettore parallelo ad r e P(1,1,3) un suo punto. Un punto di s è, per esempio, Q(0,1,1) e considerando il sistema omogeneo associato alle equazioni di s troviamo che il vettore $\overrightarrow{s}(1, -1, -2)$ è parallelo ad s. Poichè il deteminante della matrice che ha come colonne i vettori $\overrightarrow{r}, \overrightarrow{s}$ e $\overrightarrow{QP} = (1, 0, 2)$ è diverso da 0 (uguale a 2), i tre vettori non sono complanari e quindi le rette non sono complanari.
Il prodotto vettoriale dei vettori $\overrightarrow{r}$ *ed* $\overrightarrow{s}$ è $(2, 2, 0)$, quindi il fascio improprio di piani π_k paralleli alle rette r ed s ha equazione x+y+k = 0. Imponendo d(P,π_k) = $d(Q, \pi_k)$ otteniamo la condizione 2+k=-1-k e quindi k=-3/2. Il piano cercato ha equazione 2x+2y-3 = 0.

2) La matrice che rappresenta f è A = $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 4 \\ 3 & -8 & 6 \end{pmatrix}$ il polinomio caratteristico di f è $p_f(t) = -(t-1)(t^2+1)$, autovalori $1, \sqrt{-1}, -\sqrt{-1}$. L'autospazio V relativo all'autovalore 1 = ker(A-I) = Span((1,1,1)).
Per definizione, se v è autovettore di f relativo ad autovalore k , f(v) = kv, per cui f(f(v)) = f(kv) = k f(v) = $k^2 v$
e quindi v è autovettore di f^2 relativo ad autovalore k^2. Gli autovalori di f^2sono qindi 1,-1,-1. L'autospazio relativo ad 1 di f^2 è uguale all'autospazio V trovato in precedenza, l'autospazio W relativo all'autovalore -1 = ker (B+I) dove
B = A^2 = $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ è la matrice associata a g.
Si ha ker(B+I) = ker $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ = piano x-y+z = 0, base {(1,1,0),(0,1,1)}.
I vettori (1,1,1),(1,1,0),(0,1,1), sono una base di autovettori e quindi $V \oplus W$ =R^3.

3) Riducendo la matrice a gradini si vede che rg(M) = 3, quindi dim(ker(M)) = 1. Il ker(M)= autospazio relativo all'autovalore nullo (naturalmente, in generale, quando la sua dimensione non è 0, come nel nostro caso), quindi la matrice ammette autovalore 0 con molteplicità algebrica 1.