1)Sia f l'endomorfismo di R^3 definito da:

$$f(e_1) = -2e_2 + e_3, f(e_2) = 2e_1 - e_3, f(e_3) = -e_1 + e_2;$$

dove $\{e_1, e_2, e_3\}$ è la base canonica di R^3, e sia g = f^2.
a)Scrivere la matrice associata a f rispetto alla base canonica;
b)Trovare una base di ker(f) e una di Im(f);
c)Per ogni autovalore reale di f trovare una base per l'autospazio corrispondente;
d)Trovare gli autovalori di g ed una base per gli autospazi corrispondenti;
e)Stabilire se esiste una base ortonormale di autovettori di g e in caso affermativo trovarne una.

2)Si considerino i seguenti sottospazi di R^4
$W_1 = Span((1,1,1,-2),(0,0,1,-1))$;
$W_2 =\{$(x,y,z,w) $\in R^4 : x + 2y - z - w = 0\}$.
Trovare dimensione e base di W_2 e di $W_1 \cap W_2$.

3)Dato il punto P(1,1,1), trovare l'equazione del piano π passante per P,parallelo alla retta r: y=z=0
e perpendicolare al piano $\alpha : 3x + 2y - z = 1$.

Soluzioni

1) La matrice che rappresenta f nella base indicata è A = $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Una possibile riduzione a scala di A è la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, per cui: rango di A = dim (Im(f)) = 2,
base di Im(f)= $\{$(0,-2,1),(2,0,-1)$\}$ (equazione cartesiana x+y+2z=0).
dim(ker(f)) = 3-dim(Im(f)) = 1, una base di ker(f) = ker (A) e data dal vettore $v_1 = (1, 1, 2)$.
Il polinomio caratteristico di f è:
$p_f(t) = det(A - tI) = det \begin{pmatrix} -t & 2 & -1 \\ -2 & -t & 1 \\ 1 & -1 & -t \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} -t+2 & 2 & -1 \\ -2-t & -t & 1 \\ 0 & -1 & -t \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} -2t & 2-t & 0 \\ -2-t & -t & 1 \\ 0 & -1 & -t \end{pmatrix} =$
$= -2t(t^2 + 1) - [(2 - t)(2 + t)t] = -t(t^2 + 6)$.
Gli autovalori di f sono quindi: $0, \sqrt{-6}, -\sqrt{-6}$.
L,unico autovalore reale è 0 e l'autospazio corrispondente è il ker(f) determinato in precedenza. (Osserviamo che f come operatore complesso è diagonalizzabile).
La matrice associata a g è B= $A^2 = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 2 \\ 1 & -5 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$, matrice simmetrica e quindi "ortogonalmente diagonalizzabile"
(ossia in R^3 esiste una base ortonormale di autovettori di g). Si ha:
$p_g(t) = det(B-tI) = det \begin{pmatrix} -5-t & 1 & 2 \\ 1 & -5-t & 2 \\ 2 & 2 & -2-t \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} -6-t & 6+t & 0 \\ 1 & -5-t & 2 \\ 2 & 2 & -2-t \end{pmatrix} =$ (t+6)det $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -5-t & 2 \\ 2 & 2 & -2-t \end{pmatrix}$
= (t+6)det $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4-t & -5-t & 2 \\ 4 & 2 & -2-t \end{pmatrix}$ = t(t+6)^2.
Quindi: autovalori di g=f^2 sono $0, -6, -6$. In effetti,gli autovalori di f^2sono il quadrato degli autovalori di f (perchè?), e non è necessario effettuare il calcolo esplicito del polinomio caratteristico di g per determinarli, inoltre l'autospazio di g relativo all'autovalore nullo, ker(g), è uguale all'autospazio relativo all'autovalore 0 di f, ossia ker (f).
L'autospazio di g relativo all'autovalore -6 = ker (B+6I) è il piano ortogonale alla retta ker(g)(questo perchè B è simmetrica) e quindi è il piano di equazione x+y+2z = 0. Una sua possibile base "ortogonale" è data dai vettori $v_2 = (1, -1, 0)$, $v_3 = (1, 1, -1)$.
I vettori : $1/\sqrt{6}\ v_1, 1/\sqrt{2}\ v_2, 1/\sqrt{3}\ v_3$, sono una base ortonormale di autovettori di g.

2)W_2 è l'insieme delle soluzioni di (un sistema lineare di)una equazione in 4 incognite, l'equazione è omogenea quindi W_2 è un sottospazio vettoriale e dim(W_2) = 3.Una base di W_2 è per esempio data dai suoi tre vettori indipendenti $\{$(2,-1,0,0),(1,0,1,0),(1,0,0,1)$\}$.
Determiniamo equazioni cartesiane per W_1 :

$$\begin{matrix} 1 & 0 & x \\ 1 & 0 & y \\ 1 & 1 & z \\ -2 & -1 & w \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 0 & y-x \\ 0 & 1 & z-x \\ 0 & 0 & x+z+w \end{matrix}.$$

Le equazioni cartesiane di W_1sono quindi: x-y = 0, x+z+w = 0.
Equazioni cartesiane di $W_1 \cap W_2 : x - y = 0, x + z + w = 0, x + 2y - z - w = 0$, oppure il sistema equivalente

x = 0, y = 0, z+w = 0. Così, dim ($W_1 \cap W_2$) = 1, ed una base per questa retta è il vettore (0,0,1,-1).

3)La retta r' per P parallela ad r ha equazioni y-1 = 0, z-1 = 0. L'equazione del fascio di piani di centro la retta r' è. y-1+k(z-1) = 0. Imponendo la condizione di perpendicolarità con il piano α, ossia il prodotto scalare tra i vettori (3,2,-1) e (0,1,k) uguale a 0, otteniamo k = 2. Così, equazione di $\pi : y + 2z - 3 = 0$.
Equazione parametrica di $\pi : (x, y, z) = t(1, 0, 0) + s(3, 2, -1) + (1, 1, 1)$.