1) In $M_2(\mathbb{R})$ si considerino i sottospazi:
$H = \{\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ tale che x+2y=0 };
K = $\{\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ tale che x+w=0, y+2z=0 };
Determinare base e dimensione di H, K, H∩K e H+K.

2) Data la forma quadratica q:$R^4 \to$R definita da:
q(x,y,z,w)= $x^2+2y^2+z^2+w^2-2xy-2yz$;
trova una forma canonica metrica di q e indica il il cambio di coordinate effettuato per scrivere q in forma canonica.

3) Date le rette r: x-y+z=0, y+3z=0, ed s: x+y-1=0, y+3z-2=0;
a)Verifica che sono sghembe;
b)Trova la minima distanza tra r ed s.

Soluzioni
1)H è il sottospazio delle soluzioni del "sistema" lineare omogeneo dato da 1 equazione in 4 incognite, quindi dim(H)=3,una sua base $\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\}$.
Dim(K)=2, base $\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\}$.
H∩K è la retta generata da $\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, e H+K=$M_2(\mathbb{R})$.
2)La matrice associata alla forma quadratica q è:
A=$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Il polinomio caratteristico di A è det(A-tI)= det $\begin{pmatrix} 1-t & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2-t & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1-t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-t \end{pmatrix}$ = (1-t)det $\begin{pmatrix} 1-t & -1 & 0 \\ -1 & 2-t & -1 \\ 0 & -1 & 1-t \end{pmatrix}$ =
=(1-t)det $\begin{pmatrix} 1-t & 0 & t-1 \\ -1 & 2-t & -1 \\ 0 & -1 & 1-t \end{pmatrix}$ = $(1-t)^2$ det $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2-t & -1 \\ 0 & -1 & 1-t \end{pmatrix}$ =$(1-t)^2$ det $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2-t & -2 \\ 0 & -1 & 1-t \end{pmatrix}$ =
= $(1-t)^2$ det $\begin{pmatrix} 2-t & -2 \\ -1 & 1-t \end{pmatrix}$= $t(t-1)^2(t-3)$.
Gli autospazi sono:
Autospazio relativo all'autovalore 1 il piano generato dai versori {(0,0,0,1), $(-1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}, 0)$};
Autospazio relativo a 3 la retta Span($(1/\sqrt{6}, -2/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, 0)$);
Autospazio relativo all'autovalore 0, il ker(A), la retta Span($(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 0)$).
Indicata con C la matrice ortogonale che ha per colonne i quattro versori precedenti e con (x',y',z',w') le coordinate dei vettori in questa nuova base ortonormale, mediante il cambio di coordinate
$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{pmatrix}$ l'espressione della forma quadratica diventa q(v)= $(x')^2+(y')^2+3(z')^2$(forma canonica metrica di q).
3) I parametri direttori delle due rette sono rispettivamente (4,3,-1) e (3,-3,1) (soluzioni dei sistemi omogenei associati alle equazioni di r di s) , quindi le rette non sono parallele. Calcoliamo la loro minima distanza, se la distanza è maggiore di 0 le due rette non sono incidenti (quindi sghembe).
Troviamo il piano π per r parallelo ad s, la distanza cercata sara' data dalla distanza tra un punto (qualsiasi) di s, per esempio P(-1,-2,0), e π.
Equazione di π : fascio di piani di centro r : y+3z+k(x-y+z)=0, condizione di parallelismo con s: $\begin{pmatrix} k \\ 1-k \\ 3+k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$,
quindi k=0 ed equazione di π y+3z=0. Segue che la distanza cercata è ("formula" della distanza punto,piano) $2/\sqrt{10}$.