Nome

1)Sia $M_2(\mathbb{R})$lo spazio vettoriale delle matrici reali quadrate di ordine 2 e sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Si consideri l'applicazione $T: M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ definita da
T(X) = AX-XA per ogni $X \in M_2(\mathbb{R})$.
a) Provare che T è una applicazione lineare;
b) Determinare dimensione e base di ker(T) e Im(T);
c) Trovare ker(T)∩Im(T).

2)Sia $q:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma quadratica $q(v) = x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 4xy + 6xz - 12yz$.
a)Determinare una forma canonica metrica di q;
b)Determinare una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ che consenta di scrivere la forma quadratica q nella forma canonica metrica trovata.

3)Trovare l'equazione della retta r passante per il punto P(1,0,1), parallela al piano $\pi : 6x-4y+3z+2 = 0$ ed incidente la retta s:$2x+3y+1 = 0, 3y+4z-1 = 0$. Determinare inoltre il centro ed il raggio della sfera S tangente al piano π nel punto Q(0,2,2) ed avente centro sul piano x+y=0.

Soluzioni
1) Calcoli simili alla versione precedente.
2) La matrice associata alla forma quadratica q è

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -6 \\ 3 & -6 & 9 \end{pmatrix}, p_A(t) = det(A-tI) = det\begin{pmatrix} 1-t & -2 & 3 \\ -2 & 4-t & -6 \\ 3 & -6 & 9-t \end{pmatrix} =$$

$$= det\begin{pmatrix} 1-t & -2 & 3 \\ -2t & -t & 0 \\ 3 & -6 & 9-t \end{pmatrix} = -t\, det\begin{pmatrix} 1-t & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -6 & 9-t \end{pmatrix} = -t^2(t-14);$$

autovalori 0,0,14. Autospazi:
V_0 = ker(A)= piano x-2y+3z=0, base ortonormale i due vettori $v_1 = 1/\sqrt{3}(1,-1,-1)$ $v_2 = 1/\sqrt{42}(5,4,1); V_{14} = ker(A-14I)$ =retta ortogonale al piano precedente, base $v_3 = 1/\sqrt{14}(1,-2,3)$.
Indicate con X,Y,Z le coordinate dei vettori nella base $\{v_1, v_2, v_3\}$, si ha q(v)= $14Z^2$, forma canonica metrica.
3)Equazioni cartesine di r si possono ottenere mettendo a sistema l'equazione del piano α parallelo a π passante per P (ossia $\alpha : 6x-4y+3z-9 = 0$), con il piano β contenente s e passante per P. Per trovare β, considerato il fascio di piani di centro s: 2x+3y+1+k(3y+4z-1)=0 , imposto il passaggio per P si ottiene k=-1 e quindi il piano 2x-4y+2=0. Per trovare l'equazine di r si poteva anche per esempio determinare il punto H intersezione della retta s con il piano α , H=(37/61,-45/61,49/61) e poi scrivere l'equazione della retta per P e H.
L'ultima parte dell'esercizio è simile alla precedente versione.