1) Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & x & x & b \\ x & a & b & x \\ x & b & a & x \\ b & x & x & a \end{pmatrix}$$

a)Calcolare det(A);
b)Determinare gli autovalori della matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(Suggerimento:usare il risultato del punto a))
c) Stabilire se esiste una base ortonormale di autovettori di M e in caso affermativo trovarne una.

2)Sia V = $M_2(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici reali quadrate di ordine 2 e sia A = $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
Si consideri l'applicazione $T : V \to V$ definito ponendo T(X)= AX - XA $\forall X \in V$.
a) Verificare che T e' una applicazione lineare;
b)Trovare base e dimensione di ker(T) e Im(T);
c)Stabilire se V e' somma diretta di ker(T) e Im(T).

3) Sia B = { $u_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}, u_2 = \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}, u_3 = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$}, e sia f :$R^3 \to R^3$ l'endomorfismo dato dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base B.
a) Determinare la dimensione e una base di Im(f);
b) Determinare, se esiste, una applicazione lineare g : $R^3 \to R^2$ tale che Im(f) = ker (g) e $\begin{vmatrix} 2 \\ 1 \end{vmatrix} \in$ Im(g).

Soluzioni.
a) Usando le proprieta' dei determinanti e la "regola" di Laplace abbiamo:

$$det \begin{pmatrix} a & x & x & b \\ x & a & b & x \\ x & b & a & x \\ b & x & x & a \end{pmatrix} = (a-b)^2 det \begin{pmatrix} a & x & x & b \\ x & a & b & x \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (a-b)^2 det \begin{pmatrix} a+b & x & x & b \\ 2x & a & b & x \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (a-b)^2 det \begin{pmatrix} a+b & x & x \\ 2x & a & b \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= (a-b)^2 det \begin{pmatrix} a+b & 2x & x \\ 2x & a+b & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (a-b)^2[(a+b)^2 - 4x^2] = (a-b)^2(a+b-2x)(a+b+2x).$$

b) Posto, a = 1-t, x = 1, b = 2, si ha:
det(M-tI) = $(t+1)^2(t-1)(t-5)$ e gli autovalori di M sono 1,5 e -1 con molteplicita' algebrica 2 .
c) La matrice M e' simmetrica, quindi esiste in R^4 una base ortonormale di autovettori di M.
L'autospazio relativo all'autovalore -1 = ker (M+I) e' il piano di equazioni $2x_1+x_2+x_3+2x_4 = 0, x_1+2x_2+2x_3+x_4 = 0$.Una sua base ortonormale e data dai vettori $v_1 = 1/\sqrt{2}\,(1,0,0,-1)$, $v_2 = 1/\sqrt{2}\,(0,1,-1,0)$.
$V_1 = ker(M-I)$ = retta $x_2 + x_3 + 2x_4 = 0, x_1 + 2x_3 + x_4 = 0, x_1 + 2x_2 + x_4 = 0$, base il versore $v_3 = 1/2(1,-1,-1,1)$;
V_5 =retta ortogonale ai due autospazi precedenti, equazioni : $x_1 - x_4 = 0, x_2 - x_3 = 0, x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0$, base $v_4 = 1/2(1,1,1,1)$.
I vettori v_1,v_2,v_3,v_4 sono una base ortonormale di autovettori d M.

2) Posto X = $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$, dove le x_i sono le coordinate di X nella base canonica di V, si ha
T(X) = AX - XA = $\begin{pmatrix} x_3 - x_2 & x_2 + x_4 - x_1 \\ x_1 - x_3 - x_4 & x_2 - x_3 \end{pmatrix}$, e T e' lineare in quanto le coordinate del vettore immagine T(X) sono polinomi omogenei di grado 1 nelle coordinate del vettore X. In alternativa, la linearita' di T si dimostra verificando che,

per ogni X$\in V$ e per ogni scalare k, si ha: T(X+X') = T(X) + T(X') e T(kX) = kT(X).(T(X+X') = A(X+X')-(X+X')A = AX+AX'-XA-X'A = AX-XA + AX'-X'A = T(X)+T(X'); T(kX) = A(kX)-(kX)A = k(AX)-k(XA) = kT(X)).

b)Equazioni cartesiane di ker(T): $x_2 - x_3 = 0, x_1 - x_3 - x_4 = 0$, dimensione di ker(T)= 2 e base:$\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A\}$.

dim(Im(T)) = dim(V)-dim(ker(T)) = 2, base di Im(T):$\{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}$,(i primi due "vettori colonna" della metrice associata) equazioni cartesiane di Im(T): $x_1 + x_4 = 0, x_1 + x_2 + x_3 = 0$.

c)Mettendo a sistema le equazioni di ker(T) e quelle di Im(T) si ottengono le equazioni cartesiane dell'intersezione. L'unica soluzione e' il vettore nullo, segue che V e' somma diretta dei due sottospazi.

3)Come si verifica facilmente, per esempio mediante eliminazione di Gauss, il rango di A e' 2 e le prime due colonne sono indipendenti, cosi' base di Im(f) = $\{2u_1 - u_2, u_1 + u_3\} = \{\begin{vmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{vmatrix}\}$, piano di equazione cartesiana $2x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$.

Definiamo g ponendo:

$g(\begin{vmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{vmatrix}) = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$; $g(\begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$; $g(\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \end{vmatrix}$.

Questi dati definiscono una applicazione lineare, in quanto i vettori $\{\begin{vmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}\}$ sono una base del dominio, e questa applicazione soddisfa alle codizioni richieste.