1) Sia T_k l'endomorfismo di $\mathbf{R}^3$definito ponendo:
$T_k(x,y,z) = (kx+z, x-ky+z, 4x-2kz)$, per ogni $k \in \mathbf{R}$.
a) Stabilire per quali valori di $k \in \mathbf{R}$ T_k è un isomorfismo;
b)Per i valori di $k \in \mathbf{R}$ per cui T_k non è un isomorfismo, trovare autovalori e autospazi di T_k e stabilire se per questi valori esiste una base di autovettori.

2)Ridurre a forma canonica metrica l'equazione della conica: $5x^2+4xy+2y^2-6x+1=0$.
Indicare i cambi di coordinate effettuati per determinare la forma canonica e determinare le coordinate del centro e le equazioni degli assi della conica.

3)a)Scrivere le equazioni della retta r passante per l'origine, incidente la retta s: $x=t, y=-3t, z=2-t,\ t \in \mathbf{R}$
e ortogonale alla retta u: $x=1, 2y-z=1$.
b)Determinare l'equazione della sfera S avente centro su r e passante per i punti A(1,0,0) e B(0,0,1).

1) $A_K = M_{\mathcal{B}}(T_K) = \begin{pmatrix} k & 0 & 1 \\ 1 & -k & 1 \\ 4 & 0 & -2k \end{pmatrix}$; T_K isomorfismo $\Leftrightarrow \det A_K \neq 0$

$\det A_K = 2K(K^2+2)$ unica radice reale $k=0$; quindi:

a) $k \neq 0$;

b) $A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, polinomio caratteristico $\det(A_0-\lambda I) = -\lambda(\lambda+2)(\lambda-2)$

La matrice è diagonalizzabile (ossia esiste una base di autovettori di T_0) (perché?). Autospazi:

$V_0 = \ker A_0$ = retta $x_1=0$, $x_3=0$, base $\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$;

$V_2 = \ker(A_0-2I) = \ker\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ = retta $2x-z=0$, $x-2y+z=0$; base $\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right\}$

$V_{-2} = \ker(A_0+2I)$ = retta $2x+z=0$, $x+2y+z=0$; base $\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}\right\}$ -

I tre vettori indicati sono una base di autovettori e si ha

$C^{-1}A_0C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ con $C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -4 \end{pmatrix}$.

2) $A_{33} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ autovalori 1, 6; V_1 = retta $2x+y=0$ base $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right\}$

V_6 = retta $x-2y=0$ base $\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$. Mediante il cambio di coordinate (ROTAZIONE)

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ l'equazione diventa $x'^2+6y'^2-\frac{6}{\sqrt5}(x'+2y')+1=$

COMPLETANDO I QUADRATI si ottiene

$\left(x'-\frac{3}{\sqrt5}\right)^2+6\left(y'-\frac{1}{\sqrt5}\right)^2-2=0$ POSTO (equazione traslazione);

$\bar X = x'-\frac{3}{\sqrt5}$, $Y = y'-\frac{1}{\sqrt5}$ si ottiene la forma can. metrica

$\bar X^2+6Y^2=2$ (opp. $\frac12\bar X^2+3Y^2=1$)

CAMBIO DI RIFERIMENTO

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

centro $\bar X=0$, $\bar Y=0$ ossia $(x,y)=(1,-1)$, assi (rette parallele agli autospazi passanti per il centro) $2x+y-1=0$, $x-2y-3=0$

3) a) Equazione cartesiana di s: $3x+y=0$, $x+z-2=0$. Fascio di piani di centro s: $3x+y+k(x+z-2)=0$. Imponendo il passaggio per O (l'origine) si trova $k=0$. Quindi il piano per s e O è

$3x+y=0$.

Un secondo piano contenente r è $y+2z=0$

(r deve essere ortogonale al vettore $\vec{u}=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$ direzione di u)

Equazione di r: $3x+y=0$, $y+2z=0$.

b) Equazione del piano assiale del segmento $\overline{AB}$:

vettore $\vec{BA} \equiv (OA-OB)=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$, punto medio del segmento: $M\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$

equazione del piano assiale $x-z=0$. Intersecando questo piano con r troviamo il centro $C(0,0,0)$. Il raggio

$R = \text{distanza}(C,A) = 1$ equazione di S $x^2+y^2+z^2=1$.