1) Data la matrice N $= \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ si consideri l'operatore T di $M_2(\mathbb{R})$ definito da T(A) = NA per ogni A$\in M_2(\mathbb{R})$.
(a) Scrivere esplicitamente $T(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix})$.
(b) Determinare una base per il nucleo ed una base per l'immagine di T.
(c) Trovare gli autovalori di T e i rispettivi autospazi.
(d) Sia A$\in$Ker(T). Quali valori può assumere det A? (giustificare la risposta).

(2) Si considerino i seguenti sottospazi di R^4 :
$U : x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 0; V = Span((1, 1, 0, 0), (1, 1, 1, -2), (1, 1, -1, 2))$.
(a) Determinare base e dimensione di U e di U$\cap V$.
(b) Trovare equazioni cartesiane e una base ortonormale di $V^\perp$.
(c) Determinare una base del sottospazio W formato dai vettori di U ortogonali a (1,1,0,0).

(3) Dati il punto P(-1,2,1), il piano $\pi : x + y + z = 2$ e la retta r: x-y = z = 0.
(a) Verificare che P$\in \pi$.
(b) Scrivere l'equazione della retta s giacente sul piano π, passante per il punto P ed incidente la retta r.
(c) Calcolare la distanza tra P ed r.

Soluzioni (traccia).

1) $T(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2a + 4c & 2b + 4d \\ -a - 2c & -b - 2d \end{pmatrix}$.
Ker(T)={A$\in M_2(\mathbb{R})$ tale che T(A)=0}= $\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$tale che $\begin{pmatrix} 2a + 4c & 2b + 4d \\ -a - 2c & -b - 2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\}$. Quindi:
Equazioni cartesiane di Ker(T): a+2c=0, b+2d=0; base $\{ \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\}$; matrice che rappresenta T (nella base standard di $M_2(\mathbb{R})$

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}; \text{Im(T) = Ker(T).}$$

Il polinomio caratteristico di T è $p_T(t) = det(A - tI) = t^4$, l'autospazio relativo all'autovalore 0 è il Ker(T).
Per ogni A$\in$Ker(T) il det(A) deve essere 0. Questo può essere visto utilizzando la parametrizzazione relativa alla base indicata per il Ker(T): A = s $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$+t $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2s & 2t \\ -s & -t \end{pmatrix}$, qiundi det(A)=0; oppure osservando che se det(A) fosse diverso da 0, A sarebbe invertibile e dalla relazione NA=0 seguirebbe N=0 ed N non è la matrice nulla.

2)dim(U)=3 (perchè?), una base {(1,-1,0,0),(2,0,1,0),(1,0,0,1)}. Riducendo a gradini la matrice che ha per colonne i generatori di V, si ottiene dim(V)=2, equazioni cartesiane di V: $x_1 - x_2 = 0, 2x_3 + x_4 = 0$. Mettendo a sistema queste due equazioni con l'equazione di U si hanno le equazioni di U$\cap V$che semplificate sono:$x_1 = 0, x_2 = 0, 2x_3 + x_4 = 0$, base {(0,0,1,-2)}.
Usando i primi due generatori come base di V, le equazioni cartesiane di $V^\perp$ sono:
$x_1 + x_2 = 0, x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 0$, base {(1,-1,0,0),(0,0,2,1)}. Dividendo i vettori per le rispettive norme, $\sqrt{2}$ e $\sqrt{5}$ si ottiene una base ortonormale.
Le equazioni cartesiane di U sono $x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 0, x_1 + x_2 = 0$, quindi: dim(W)=2, base {(0,0,1,-2),(1,-1,0,0)}.

3)Possiamo trovare s come intersezione del piano π con il piano α contenente r e passante per P. Considerato il fascio di piani di centro r: x-y+kz=0 e imponendo il passaggio per P si ottiene l'equazione di α x-y+3z=0. Quindi equazioni di s: x+y+z = 2, x-y+3z=0.
I parametri direttori di r sono (1,1,0), quindi (imponendo il passaggio per P) il piano ortogonale ad r per P ha equazione: x+y-1=0. Questo piano interseca r nel punto Q(1/2,1/2,0) e distanza tra P ed r = distanza tra P e Q = $\sqrt{22}/2$.