Nome

1)Sia $M_2(\mathbb{R})$lo spazio vettoriale delle matrici reali quadrate di ordine 2 e sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Si consideri l'applicazione $T:M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ definita da $T(X) = AX+XA$ per ogni $X \in M_2(\mathbb{R})$.
a) Provare che T è una applicazione lineare;
b) Determinare dimensione , base, equazioni cartesiane di ker(T) e Im(T);

2)Sia $q:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma quadratica $q(v) = -x^2+6xy-y^2+6z^2+2\sqrt{6}xz+2\sqrt{6}yz$.
a)Determinare una forma canonica metrica di q;
b)Determinare una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ che consenta di scrivere la forma quadratica q nella forma canonica metrica trovata.

3)Trovare l' equazione dei piani che distano $2\sqrt{3}$ dal punto P(2,1,4) e contenenti la retta r:x+y=2, 2x+z=1.
Determinare inoltre il centro ed il raggio della sfera S tangente al piano π : $x - y + z + 1 = 0$ nel punto Q(0,1,0) ed avente centro sul piano x-y=0.

Soluzioni

1) Occorre verificare che per ogni X,X'$\in M_2(\mathbb{R})$ si ha T(X+X') = T(X)+ T(X') e che per ogni scalare t$\in$R e per ogni X$\in M_2(\mathbb{R})$si ha T(tX)=tT(X). Ora T(X+X')= A(X+X')+(X+X')A = AX+AX'+XA+X'A = AX+XA+AX'+X'A = T(X)+T(X'); e T(tX)= A(tX)+(tX)A= t(AX)+t(XA)= t(AX+XA)= tT(X). Questa verifica poteva anche essere tralasciata, utilizzando il calcolo in coordinate che ora effettuiamo.
Indicate le coordinate delle matrice X, nella base canonica, di $M_2(\mathbb{R})$,con x_1, x_2, x_3, x_4 si ha $T(\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix})$ =(calcoli elementari) $=\begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 & x_2 \\ x_1 + x_3 + x_4 & x_2 \end{pmatrix}$; quindi il vettore di coordinate (x_1, x_2, x_3, x_4) ha come immagine il vettore $(2x_1+x_2, x_2, x_1+x_3 + x_4, x_2)$, per cui
a) T e lineare, in quanto le coordinate del vettore immagine T(X) sono polinomi omogenei di grado 1 nelle coordinate di X;
b) Ker(T)= {X/T(X)=0} ha equazioni cartesiane $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 + x_4 = 0$, segue che dim(Ker(T))=1, base $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

La matrice che rappresenta T è $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

ed una base per Im(T) (che ha dimensione 3) è $\{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\}$ equazione cartesiana $x_2 = x_4$.
2)La matrice simmetrica associata alla forma quadratica è

$A=\begin{pmatrix} -1 & 3 & \sqrt{6} \\ 3 & -1 & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & \sqrt{6} & 6 \end{pmatrix}$

ed occorre trovare una base ortonormale di autovettori di A. Il polinomio caratteristico $p_A(t) = det(A - tI) = det\begin{pmatrix} -1-t & 3 & \sqrt{6} \\ 3 & -1-t & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & \sqrt{6} & 6-t \end{pmatrix} =$

$= det\begin{pmatrix} -4-t & 4+t & 0 \\ 3 & -1-t & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & \sqrt{6} & 6-t \end{pmatrix} = -(t+4)det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1-t & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & \sqrt{6} & 6-t \end{pmatrix} =$

$= -(t+4)det\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2-t & -1-t & \sqrt{6} \\ 2\sqrt{6} & \sqrt{6} & 6-t \end{pmatrix} = -(t+4)((2-t)(6-t)-12) =$

$= -t(t+4)(t-8)$.

Gli autovalori sono 8,-4,0. I tre autospazi corrispondenti (tre rette ortogonali tra loro) sono:

$V_0 = ker(A)$ = retta di equazione $-x_1 + 3x_2 + \sqrt{6}x_3 = 0$, $x_1 - x_2 = 0$, base il versore $v_1 = 1/4(\sqrt{6}, \sqrt{6}, -2)$;

$V_8 = ker(A - 8I)$ =retta $x_1 - x_2 = 0$, $\sqrt{6}x_1 - x_3 = 0$;base il versore $v_2 = (1/2\sqrt{2})(1, 1, \sqrt{6})$;

Il terzo autospazio relativo all'autovalore -4 è il ker(A+4I)= retta $x_1 + x_2 = 0, x_3 = 0$, base ortonormale il versore $v_3 = 1/\sqrt{2}(1, -1, 0)$.Indicate con X,Y,Z le coordinate relative alla base v_1,v_2,$v_3$si ha che la funzione q è data da q(v)= $8Y^2 - 4Z^2$.

3)Nel fascio di piani di centro r : x+y-2+k(2x+z-1)=0 quindi (1+2k)x+y+kz-2-k=0,cerco i piani che distano $2\sqrt{3}$ da P.

$2\sqrt{3} = [(1 + 2k)2 + 1 + 4k - 2 - k]/\sqrt{(1 + 2k)^2 + 1 + k^2}$ con semplici calcoli trovo $11k^2 + 34k + 23 = 0$ e le soluzioni k=-1 e k=-23/11 a cui corrispondono i piani x-y+z+1=0, e 35x-11y+23z-1=0.

Per la seconda parte, la retta

s: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ per Q perpendicolare al piano π interseca il piano x-y=0 nel punto C(1/2,1/2,1/2) che è il centro della sfera, la distanza tra i punti C e Q (=$\sqrt{3}/2$) è il raggio. L'equazione della sfera è:

$(x-1/2)^2 + (y - 1/2)^2 + (z - 1/2)^2 = 3/4$.