1) Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione 4 e B = $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ una sua base. Sia f l'endomorfismo di V definito da:
f(e_1) $= 2e_1 + e_2,\ f(e_2) = e_1 + 2e_2,\ f(e_3) = e_4,\ f(e_4) = e_3$.
Indicata con A la matrice associata ad f nella base B , stabilire se A è congruente con una matrice diagonale e, in caso affermativo, trovare una matrice P ortogonale che determini la congruenza.

2) Data la retta r passante per i punti A(1,0,1) e B(3,1,1) e la retta s di equazioni x-3y+z = 4, y+z = -1:
a)Determinare la posizione reciproca di r ed s;
b) Scrivere l'equazione del piano π passante per il punto Q(0,1,-2) e parallelo ad r e s;
c)Trovare la distanza di π dalle rette r ed s.

3) Sia M = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 7 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$, detrminare base e dimensione di (ker(M))$^\perp\cap$ (Im(M))$^\perp$.

Soluzioni.

Si ha A=$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Poichè A è una matrice simmetrica, A è "ortogonalmente" diagonalizzabile, ossia esiste in V una base ortonormale di autovettori di A. Indicata con P una matrice avente per colonne una base ortonormale di autovettori di A, si ha P^{-1}AP = D matrice diagonale e, poichè P è ortogonale, P^{-1}=P^T e quindi A è congruente con D.
Il polinomio caratteristico di f è det(A-tI)= (calcoli)= (t-3)(t-1)^2(t+1). Autospazi:
V_3 =ker(A-3I)=ker $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ =retta -x_1+x_2 = 0, x_3 = 0,x_4 = 0;base ortonormale { $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0,0)$};
V_{-1}=ker(A+I)= retta di equazioni x_1 = 0, x_2 = 0, x_3+x_4 = 0, base{$\frac{1}{\sqrt{2}}(0,0,1,-1)$};
V_1 =ker(A-I)= ker $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ =
piano $x_1 + x_2 = 0, -x_3 + x_4 = 0,$; base $\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0,0), \frac{1}{\sqrt{2}}(0,0,1,1)\}$.
Quindi $P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2)Il vettore OB-OA = (2,1,0) è parallelo alla retta r, così, equazioni parametriche di r: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$=t$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Sostituendo nelle equazioni di s, otteniamo la soluzione t=-2. Le rette r ed s sono quindi incidenti, (il punto comune è (-3,-2,1)).
Considerando il fascio di piani di centro s: x-3y+z-4 + k (y+z+1)=0
trovo il piano α contenente r ed s imponendo il passaggio per il punto A di r. Si ottiene k=1 e quindi il piano x-2y+2z-3=0. Il piano π è il piano per Q parallelo ad α : x-2y+2z+6=0.

3) Riducendo a gradini la matrice M si ottiene (con semplici passaggi) la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Quindi,

rg(M)=2=dim(Im(M)) e dim(ker(M))= 4-2=2.
Base del sottospazio Im(M): {(1,2,1,-1),(0,3,1,2)} (prime due colonne di M); equazioni cartesiane di Im(M):
$3x_1 - 2x_3 + x_4 = 0, x_1 + x_2 - 3x_3 = 0$.
Equazioni cartesiane di ker(M)=ker (matrice ridotta): $x_1 + x_3 + 2x_4 = 0, x_2 - x_3 + x_4 = 0$;base {(-1,1,1,0),(2,1,0,-1)}.
Quindi:
(Im(M))$^\perp$ = piano di equazioni cartesiane $x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0,\ 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 0$,base {(3,0,-2,1),(1,1,-3,0)}.
(ker(M))$^\perp$ =piano di equazioni -$x_1 + x_2 + x_3 = 0, 2x_1 + x_2 - x_4 = 0$,base {(1,0,1,2),(0,1,-1,1)}.
Le equazioni cartesiane del sottospazio intersezione richiesto si ottengono mettendo a sistema le quattro equazioni precedenti. Risolviamo riducendo a scala il sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \text{così:}$$

dim $((\ker(M))^{\perp} \cap (\mathrm{Im}(M))^{\perp}) = 1$, base il vettore (4,-5,9,3).
Il sottospazio somma $(\ker(M))^{\perp} + (\mathrm{Im}(M))^{\perp}$ è il sottospazio generato dai due vettori della base di $(\ker(M))^{\perp}$ uniti ai due vettori della base di $(\mathrm{Im}(M))^{\perp}$.
Mettendoli in colonna in una matrice e aggiungendo la colonna delle "incognite" $\mathrm{x}_1, x_2, x_3, x_4$, mediante la riduzione a scala otteniamo 3 pivots (quindi la dimensiione del sottospazio somma è 3), le prime tre colonne sono una base e l'equazione cartesiana è: $\mathrm{x}_1 + 2\mathrm{x}_2 + \mathrm{x}_3 - \mathrm{x}_4 = 0$(un'altra possibile base è per esempio $\{$(2,-1,0,0),(1,0,-1,0),(1,0,0,1)$\}$).