

Diario delle lezioni di
Metodi e Modelli dei Mercati Finanziari
a.a. 2019/2020
www.mat.uniroma2.it/~caramell/did_1920/mmmf.htm

Lezioni 1, 2, 3 - 02/10/2019

Introduzione al corso. Richiami di calcolo stocastico: integrale di Ito, processi di Ito, formula di Ito. Introduzione al teorema di Girsanov.

[cfr. Baldi, Cap. 7, 8, Par. 12.1; Lamberton e Lapeyre, Cap. 3]

Lezioni 4, 5, 6 - 04/10/2019

Risultati generali sulla “martingala esponenziale (complessa)”. Il teorema di Girsanov. I teoremi di rappresentazione delle martingale browniane.

[cfr. Baldi, Par 12.1 e 12.3; Lamberton e Lapeyre, Cap. 3]

Lezioni 7, 8, 9 - 10/10/2019

Conclusione della dimostrazione del teorema di rappresentazione delle martingale browniane di quadrato integrabile. Conseguenze: 1) caratterizzazione delle misure equivalenti su (Ω, \mathcal{F}_T) , dove $\mathcal{F}_T = \sigma(B_s, s \leq T) \vee \mathcal{N}$ (B = browniano, \mathcal{N} = insiemi di misura nulla); 2) se $(M_t)_{t \in [0, T]}$ è una martingala locale browniana tale che $\sup_{t \leq T} |M_t|$ è di quadrato integrabile allora $(M_t)_{t \in [0, T]}$ è una martingala browniana.

Ancora richiami di calcolo stocastico: equazioni differenziali stocastiche (teorema classico di esistenza ed unicità, stime in L^p , markovianità della soluzione, generatore infinitesimale). Il moto browniano geometrico.

[cfr. Baldi, Par 12.3, 12.4 e Cap. 9; Lamberton e Lapeyre, Cap. 3 (vd esercizio 15, punto 1) e Cap. 4.]

Lezioni 10, 11, 12 - 17/10/2019

Introduzione alla finanza. Le opzioni e i due problemi ad esse associati: prezzo e copertura. Il modello di Black e Scholes. Strategie di mercato e portafoglio. Prezzo e portafoglio scontati. Strategie autofinanzianti: caratterizzazione in termini della dinamica del portafoglio scontato. La misura “equivalente di martingala” o “di rischio neutro”. Strategie ammissibili e replicanti. Il teorema di replicabilità delle opzioni europee di quadrato integrabile sotto la misura di rischio neutro. Il prezzo delle opzioni europee.

[cfr. Lamberton e Lapeyre, Cap. 4]

Lezioni 13, 14 - 18/10/2019

Opzioni il cui payoff dipende dal sottostante a maturità: la funzione-prezzo. L'equazione alle derivate parziali per la funzione-prezzo ed il calcolo della copertura (strategia replicante). Le Greche di un'opzione. La formula di Black e Scholes per l'opzione call. La formula di parità per opzioni call/put e la formula per la funzione-prezzo della put.

[cfr. Lamberton e Lapeyre, Cap. 4]

Lezioni 15, 16, 17 - 24/10/2019

Il modello di Black e Scholes con coefficienti dipendenti dal tempo (con particolare attenzione alla scelta delle ipotesi meno restrittive per le funzioni r_t, μ_t, σ_t). Il modello di Garman-Kohlhagen per opzioni su valuta estera.

[cfr. Lamberton e Lapeyre, Cap. 4, Problemi 1 e 2]

Lezioni 18, 19, 20 - 25/10/2019

Opzioni di scambio su due sottostanti nel modello di Black e Scholes.

[cfr. Lamberton e Lapeyre, Cap. 4, Problema 3]

Lezioni 21, 22, 23 - 31/10/2019

Opzione composta call su call. Opzione call asiatica.

[cfr. Lamberton e Lapeyre, Cap. 4, Problemi 5 e 7]

Lezioni 24, 25, 26 - 07/11/2019

Opzione call asiatica - ultima parte.

Modelli generali (di Ito) per la finanza: il “rumore” descritto tramite un browniano in \mathbb{R}^d , il prezzo del titolo non rischioso con un tasso di interesse istantaneo aleatorio, i prezzi degli m titoli rischiosi descritti tramite processi di Ito. Le strategie autofinanzianti e la loro caratterizzazione usando il portafoglio scontato. Le strategie ammissibili e di arbitraggio. La misura equivalente di martingala \mathbb{P}^* : esistenza. Il moto browniano sotto \mathbb{P}^* . Dinamica dei prezzi scontati sotto una misura equivalente di martingala \mathbb{P}^* e il sistema lineare per la determinazione della densità di \mathbb{P}^* rispetto a \mathbb{P} . Le proprietà di martingala del portafoglio scontato associato a strategie autofinanzianti e ammissibili. Definizione di opzione europea. Strategie replicanti e prezzo di “non arbitraggio” per un'opzione replicabile in presenza di una misura equivalente di martingala. Indipendenza del prezzo dalla misura equivalente di martingala.

[cfr. Lamberton e Lapeyre, Cap. 4, Problema 7; Baldi, Par. 13.3, 13.4]

Lezioni 27, 28, 29 - 08/11/2019

Definizione di mercato completo ed unicità della misura equivalente di martingala in un mercato completo.

Il modello di diffusione per la descrizione dei mercati finanziari: definizione, richieste sui coefficienti del modello. Condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di una misura equivalente di martingala. La condizione sufficiente classica sulla volatilità che garantisce l'esistenza della misura equivalente di martingala. Teorema classico di completezza del mercato.

[cfr. Baldi, Par. 13.4]

Lezioni 30, 31, 32 - 14/11/2019

Breve discussione sui mercati non completi. Equazione alle derivate parziali associata al prezzo di un'opzione europea quando esiste la funzione-prezzo ed è noto essere regolare; la strategia di copertura come il gradiente della funzione-prezzo. La regolarità della funzione-prezzo di un'opzione europea di payoff dipendente dal prezzo dei titoli a maturità: legame con EDP paraboliche. Operatori differenziali lineari del secondo ordine uniformemente ellittici e diffusione sottostante.

[cfr. Baldi, Par. 13.5, 13.6]

Lezioni 33, 34, 35 - 15/11/2019

La regolarità della funzione-prezzo come conseguenza del teorema di esistenza ed unicità (forte) di una EDP parabolica con termine del secondo ordine uniformemente ellittico (cambio di variabile). EDP paraboliche in un dominio limitato (problema di Cauchy-Dirichlet): il teorema di esistenza ed unicità (s.d.); la formula di rappresentazione per la soluzione. EDP paraboliche con problema di Cauchy su \mathbb{R}^m : il teorema di esistenza ed unicità (s.d.).

[cfr. Baldi, Par. 13.6, 10.3, 10.4]

Lezioni 36, 37, 38 - 21/11/2019

La formula di Feynman-Kac per la rappresentazione delle soluzioni EDP paraboliche con problema di Cauchy su \mathbb{R}^m . Uso della formula di Feynman-Kac per determinare le condizioni sui coefficienti del modello e sulla funzione payoff affinché la funzione-prezzo sia una soluzione regolare dell'EDP parabolica associata. In particolare, calcolo della copertura tramite la formula di Ito. Cenni sulla soluzione fondamentale di un problema parabolico e legame con la densità di transizione: stime gaussiane ed equazione backward.

Metodi Monte Carlo: generalità. L'IC di output. Simulazione di v.a. gaussiane tramite il generatore di Box-Muller. Simulazione del moto browniano.

[cfr. Baldi, Par. 10.4, 10.5, 13.6; Appunti su metodi Monte Carlo, Par. 1, 2]

Lezioni 39, 40, 41 - 22/11/2019

Simulazione del moto browniano geometrico. Calcolo numerico con tecniche Monte Carlo nel modello di Black e Scholes del prezzo di opzioni call/put standard. Confronto con le formule esatte e studio empirico della velocità di convergenza. Calcolo numerico con tecniche Monte Carlo nel modello di Black e Scholes del prezzo di opzioni asiatiche call/put standard. Uso delle formule di parità per la validazione del programma. Opzioni con barriera: valutazione numerica del prezzo con Monte Carlo tramite (a) approssimazione del sup su $[0, T]$ con il max osservato ai tempi $t_1 < t_2 < \dots < t_N$ (stimatore Monte Carlo distorto) e (b) con una formula di rappresentazione che coinvolge solo il valore del sottostante a T (stimatore Monte Carlo non distorto). Formule di "parità" per la validazione dei programmi.

[cfr. Appunti su metodi Monte Carlo, Par. 2, 3.1.1, 3.1.2, 3.1.3]

Lezioni 42, 43, 44 - 28/11/2019

Dimostrazione della formula di rappresentazione per opzioni con barriera. Opzioni su due sottostanti (call e digital) e relative formule di "parità" nel modello di Black-Scholes. Calcolo numerico via Monte Carlo della copertura: il metodo delle differenze finite (uso delle differenze centrate) e il metodo basato sulla rappresentazione della delta sotto forma di aspettazione.

[cfr. Appunti su metodi Monte Carlo, Par. 3.1.4, 3.2.1, 3.2.2]

Lezioni 45, 46, 47 - 29/11/2019

Dimostrazione della formula di rappresentazione della delta come aspettazione di un'opportuna v.a. Copertura dinamica.

Stimatori di massima verosimiglianza per μ e σ nel modello Black&Scholes.

[cfr. Appunti su metodi Monte Carlo, Par. 3.2.2, 3.3; articolo di Brigo et al.]

Lezioni 48, 49, 50 - 05/12/2019

Il teorema di Cochran. Intervalli di fiducia per gli stimatori di massima verosimiglianza di media e varianza in un campione Gaussiano. Approssimazione dei quantili della legge $\chi^2(n)$ quando $n \rightarrow \infty$.

[cfr. Articolo di Brigo et al.]

Lezioni 51, 52, 53 - 12/12/2019

Lezione e progetto di lavoro in collaborazione con Enel su un problema di calcolo della strategia di copertura associata ad un contratto di compravendita di gas.

Lezioni 54, 55, 56 - 16/12/2019

Discussioni ed approfondimenti sul progetto di lavoro in collaborazione con Enel.

Lezioni 57, 58 - 19/12/2019

Seminario su metodi alle differenze finite per la risoluzione numerica di EDP - in collaborazione con Maya Briani (IAC-CNR, Roma).