

PF - PROBABILITÀ E FINANZA  
AA 2018/2019

INFORMAZIONI E PROGRAMMA DEL CORSO  
UNIVERSITÀ TOR VERGATA  
DOCENTE: LUCIA CARAMELLINO<sup>1</sup>

## Informazioni sul corso

### Prerequisiti

Per una buona preparazione all'esame è consigliato il corso Probabilità e statistica del II anno di Laurea Triennale.

### Modalità d'esame

L'esame consiste in una prova orale, che comprende anche una discussione sugli algoritmi numerici analizzati durante il corso. I programmi con l'implementazione degli algoritmi vanno consegnati almeno una settimana prima della data d'esame (tramite supporto oppure via e-mail all'indirizzo: [caramell@mat.uniroma2.it](mailto:caramell@mat.uniroma2.it); qui di seguito sono elencati tutti gli esercizi richiesti). Si fa esplicita richiesta di utilizzo di un *linguaggio di programmazione* (ad es. C, C++, Pascal etc., ma non Scilab o analoghi *software*), a scelta dello studente.

### Testi consigliati

- P. Baldi, L. Caramellino: *Appunti del corso Probabilità e Finanza*, versione Dicembre 2017.
- A. Pascucci, W.J. Runggaldier: *Finanza matematica. Teoria e problemi per modelli multiperiodali*. Springer Universitext, 2009.
- P. Glasserman: *Monte Carlo methods in financial engineering*. Springer-Verlag, 2004.

Gli appunti si possono richiedere via email all'indirizzo [caramell@mat.uniroma2.it](mailto:caramell@mat.uniroma2.it)

## Programma

### PARTE I. Probabilità

#### Cenni di teoria della misura: $\sigma$ -algebre e funzioni misurabili

Richiami di probabilità: le algebre e le  $\sigma$ -algebre. La  $\sigma$ -algebra generata da una classe di sottoinsiemi. Esempi:  $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$  quando  $\mathcal{C}$  è una  $\sigma$ -algebra;  $\sigma(\mathcal{C}_1) \subset \sigma(\mathcal{C}_2)$  quando

---

<sup>1</sup>Dipartimento di Matematica, Università di Roma-Tor Vergata, email: [caramell@mat.uniroma2.it](mailto:caramell@mat.uniroma2.it); web: [www.mat.uniroma2.it/~caramell](http://www.mat.uniroma2.it/~caramell)

$\mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}_2$ . La  $\sigma$ -algebra generata da una partizione al più numerabile. La  $\sigma$ -algebra di Borel. Le classi generatrici di  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  (intervalli aperti, semichiusi, chiusi, etc.). La classe  $\pi(\mathbb{R}) = \{(-\infty, c] : c \in \mathbb{R}\}$  come classe che genera  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ . Spazi misurabili e funzioni misurabili. La  $\sigma$ -algebra generata da una funzione misurabile e la sua caratterizzazione in termini di controimmagini. Condizioni sufficienti per la verifica della misurabilità. Caso particolare per funzioni a valori reali. Funzioni discrete: definizione, misurabilità, la  $\sigma$ -algebra generata come una  $\sigma$ -algebra generata da una partizione numerabile. Proprietà delle funzioni misurabili: la classe delle funzioni misurabili come un'algebra; misurabilità della funzione composta di funzioni misurabili; misurabilità dell'inf, del sup etc. di una successione di funzioni misurabili;  $\sigma(f) = \sigma(g)$  quando  $f = h_1 \circ g$  e  $g = h_1 \circ f$ , con  $f, g, h_1, h_2$  misurabili; data una partizione  $\mathcal{C}$  al più numerabile, se  $f$  è  $\sigma(\mathcal{C})$ -misurabile allora  $f$  è costante su tutti gli elementi della partizione. Date due funzioni  $\mathcal{S}$ -misurabili  $f$  e  $g$ , se  $g$  è  $\sigma(f)$ -misurabile allora  $g = h \circ f$ , per un'opportuna funzione misurabile  $h$ .

[cfr. Appunti, Par. 2.1]

### Spazi di probabilità e variabili aleatorie

Definizione di uno spazio di probabilità  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . Caso particolare: quando  $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{C})$  con  $\mathcal{C}$  partizione al più numerabile di  $\Omega$  allora  $\mathbb{P}$  è perfettamente individuata dai valori  $\mathbb{P}(C)$ , al variare di  $C \in \mathcal{C}$ . Le proprietà generali della probabilità  $\mathbb{P}$  e la proprietà di monotonia. Indipendenza tra eventi, legame con la proprietà di fattorizzazione delle  $\sigma$ -algebre generate da questi eventi. La definizione di  $\sigma$ -algebre indipendenti. Caso particolare: quando le  $\sigma$ -algebre sono generate da partizioni al più numerabili basta che la proprietà di fattorizzazione valga per elementi scelti nelle partizioni. Le variabili aleatorie (v.a.) come funzioni misurabili. La definizione di v.a. indipendenti in termini delle  $\sigma$ -algebre generate. Definizione di indipendenza tra v.a. e  $\sigma$ -algebre. Le proprietà delle v.a. Richiami dal corso dei probabilità del II anno: v.a. discrete e assolutamente continue (legge congiunta, leggi marginali), caratterizzazione dell'indipendenza in termini di densità; densità discreta condizionale; la speranza matematica per v.a. discrete o a.c. e le sue proprietà. Caso particolare: la media di una v.a. discreta come somma pesata su  $\Omega$  (e non sullo spazio di arrivo). Ancora richiami: momento  $k$ -esimo e momento  $k$ -esimo centrato; spazi  $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ,  $p \geq 1$ , e l'inclusione  $L^p \subset L^q$  quando  $p \geq q \geq 1$ ; lo spazio  $L^2$  e la varianza; le disuguaglianze di Markov, di Chebycev, di Schwarz; richiami sulla covarianza e varianza della somma di v.a.; speranza matematica di un vettore aleatorio.

[cfr. Appunti, Par. 2.3]

### La speranza condizionale

Speranza matematica condizionale:  $\mathbb{E}(X | Y)$  quando  $(X, Y)$  è un vettore aleatorio discreto e  $\mathbb{E}(X | \mathcal{G})$  quando  $\mathcal{G}$  è una  $\sigma$ -algebra generata da una partizione al più numerabile di  $\Omega$ . Definizione formale di  $\mathbb{E}(X | \mathcal{G})$ . Caso particolare: quando  $\mathcal{G} = \sigma(Y)$ , quindi  $\mathbb{E}(X | \mathcal{G}) = \mathbb{E}(X | Y) = \Psi_X(Y)$ , con  $\Psi_X$  funzione boreliana. Il formalismo “ $\mathbb{E}(X | Y = y)$ ”. Calcolo esplicito della funzione  $\Psi_X$  quando  $X$  e  $Y$  hanno densità congiunta discreta oppure hanno densità congiunta continua, in quest'ultimo caso definizione di “densità

continua condizionale". Le proprietà della media condizionale: se  $X = c$  q.c. allora  $\mathbb{E}(X | \mathcal{G}) = c$  q.c.;  $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X | \mathcal{G})) = \mathbb{E}(X)$ ; linearità, positività e monotonia della media condizionale; la disuguaglianza di Jensen per la media e per la media condizionale; se  $X$  è  $\mathcal{G}$ -misurabile allora  $\mathbb{E}(XY | \mathcal{G}) = X\mathbb{E}(Y | \mathcal{G})$ ; se  $\mathcal{A} \subset \mathcal{G}$  sotto  $\sigma$ -algebre di  $\mathcal{F}$  allora  $\mathbb{E}(X | \mathcal{A}) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X | \mathcal{A}) | \mathcal{G}) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X | \mathcal{G}) | \mathcal{A})$ ; se  $X \perp\!\!\!\perp \mathcal{G}$  allora  $\mathbb{E}(X | \mathcal{G}) = \mathbb{E}(X)$ ; se  $X$  è  $\mathcal{G}$ -misurabile e  $Y \perp\!\!\!\perp \mathcal{G}$  allora  $\mathbb{E}(f(X, Y) | \mathcal{G}) = \mathbb{E}(f(x, Y))|_{x=X}$ ; se  $X$  è di quadrato integrabile allora  $\mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X | \mathcal{G}))^2) \leq \mathbb{E}((X - Z)^2)$  per ogni v.a.  $Z$  di quadrato integrabile e  $\mathcal{G}$ -misurabile.

[cfr. Appunti, Par. 3.1]

## Martingale, tempi d'arresto

Filtrazioni, processi adattati a tempo discreto. Definizione di martingala (mg), supermartingala (supermg) e submartingala (submg). Se  $(X_n)_n$  è una martingala (risp. supermg, submg) allora  $\{\mathbb{E}(X_n)\}_n$  è una successione costante (risp. non crescente, non decrescente). Proprietà delle martingale, submartingale e supermartingale. La decomposizione di Doob ed il compensatore. Le martingale trasformate. Tempi d'arresto e  $\sigma$ -algebra degli eventi antecedenti: definizioni e definizioni equivalenti. Proprietà dei tempi d'arresto, ad esempio: il tempo di ingresso/di uscita di un processo adattato è un tempo d'arresto; se  $\tau_1$  e  $\tau_2$  sono  $\mathcal{F}_n$ -t.a. allora  $\tau_1 \wedge \tau_2$  è un  $\mathcal{F}_n$ -t.a.; se  $\tau_1$  e  $\tau_2$  sono  $\mathcal{F}_n$ -t.a. tali che  $\tau_1 \leq \tau_2$  allora  $\mathcal{F}_{\tau_1} \subset \mathcal{F}_{\tau_2}$ ; se  $\tau_1$  e  $\tau_2$  sono  $\mathcal{F}_n$ -t.a. allora  $\mathcal{F}_{\tau_1 \wedge \tau_2} = \mathcal{F}_{\tau_1} \cap \mathcal{F}_{\tau_2}$ ; se  $(X_n)_n$  è un processo  $\mathcal{F}_n$ -adattato e  $\tau$  è un  $\mathcal{F}_n$ -t.a. finito allora  $X_\tau$  è una v.a.  $\mathcal{F}_\tau$ -misurabile; se  $X$  è una v.a. integrabile e  $\tau$  è un  $\mathcal{F}_n$ -t.a. allora  $\mathbb{E}(X | \mathcal{F}_\tau) = X_\tau$ , dove  $X_n = \mathbb{E}(X | \mathcal{F}_n)$ ,  $n \geq 0$ . Il processo arrestato  $X_n^\tau = X_{\tau \wedge n}$ : se  $(X_n)_n$  è una  $\mathcal{F}_n$ -mg (risp. submg, supermg) e  $\tau$  è un  $\mathcal{F}_n$ -t.a. allora  $(X_n^\tau)_n$  rimane una  $\mathcal{F}_n$ -mg (risp. submg, supermg). Il teorema d'arresto.

[cfr. Appunti, Par. 3.2, 3.3]

## Parte II. Modelli discreti per la finanza

### Introduzione alla finanza

Tassi di interesse: interesse composto, semplice, istantaneo. Aspetti dei mercati finanziari: la vendita allo scoperto; l'arbitraggio; le ipotesi di mercato. Prodotti derivati. Contratti forward: valutazione di "non arbitraggio" del prezzo forward. Le opzioni di acquisto (call) e di vendita (put). Le opzioni come strumenti finanziari per la gestione dei rischi. Il payoff dell'opzione call/put. Il problema del prezzo e della copertura dell'opzione.

[cfr. Appunti, Cap 1]

### Opzioni europee

Il modello discreto per la descrizione dei mercati finanziari: la filtrazione, il processo  $d+1$ -dimensionale dei prezzi, il fattore di sconto ed il processo dei prezzi scontati. Strategie di gestione e portafoglio associato. Strategie autofinanzianti e caratterizzazione in termini di scrittura del portafoglio e del portafoglio scontato. Dati un processo predicibile  $(\phi_n^1, \dots, \phi_n^d)_n$  a valori in  $\mathbb{R}^d$  e  $V_0 \in \mathbb{R}$  esiste un unico processo predicibile  $(\phi_n^0)_n$  tale che

$(\phi_n^0, \phi_n^1, \dots, \phi_n^d)_n$  sia una strategia ammissibile. Il primo teorema fondamentale dell'asset pricing. Conseguenze dell'esistenza della misura di martingala equivalente, ad esempio la formula di parità call-put. Mancanza di arbitraggio nel modello binomiale e del modello trinomiale ad un periodo: studio dell'esistenza della misura di martingala equivalente ed eventuale unicità. Definizione formale di un'opzione europea. Esempi: opzioni call, put, digital, asiatiche, con barriere. Opzioni replicabili e prezzo "di non arbitraggio". Completezza del mercato. Il secondo teorema fondamentale dell'asset pricing. Esempio: in mancanza di arbitraggio, il modello binomiale ad un periodo è completo ma il modello trinomiale ad un periodo non lo è. La formula di parità call-put con l'uso esplicito del prezzo (portafoglio replicante). Il modello di Cox, Ross e Rubinstein (CRR): definizione, proprietà. Equivalenza tra mancanza di arbitraggio e la condizione  $a < r < b$ . Completezza del mercato. Formula esplicita del prezzo di un'opzione di payoff  $h = F(S_N)$ . Calcolo della strategia replicante per opzioni di payoff  $h = F(S_N)$ . Formula *backward* del prezzo. Uso pratico del modello CRR: suddivisione dell'intervallo  $[0, T]$  in  $N$  sottointervalli, scelta del tasso ( $r_N = RT/N$ ) e dei salti ( $1 + a_N = (1 + r_N)e^{-\sigma\sqrt{T/N}}$  e  $1 + b_N = (1 + r_N)e^{\sigma\sqrt{T/N}}$ ) in modo da costruire un mercato completo. La volatilità  $\sigma > 0$ . Convergenza in legge, per  $N \rightarrow \infty$ , di  $\log \tilde{S}_N^N/S_0$  ad una normale di media  $-\sigma^2 T/2$  e varianza  $\sigma^2 T$ . Le formule di Black e Scholes per il prezzo della call e della put come limite, per  $N \rightarrow \infty$ , del valore della call e della put nel modello CRR. Studio empirico (in scala logaritmica) della convergenza e metodo di estrapolazione di Romberg per determinare una successione che converge più velocemente. Prezzo Black e Scholes di call/put come funzione crescente del parametro volatilità - interpretazione finanziaria.

Programmi da consegnare inerenti a questi argomenti:

- studio empirico della velocità di convergenza del prezzo CRR al prezzo Black e Scholes della call e della put (Esercizio 4.1).

[cfr. Appunti, Cap. 4]

### Opzioni americane nei mercati completi

Opzioni americane nel modello generale, in ipotesi di completezza del mercato. Il processo-payoff. La formulazione "all'indietro" del prezzo dell'opzione americana (principio di programmazione dinamica). Payoff e prezzo scontati: formulazione "all'indietro" del prezzo scontato dell'opzione americana in termini del processo di payoff scontato. Il prezzo scontato dell'opzione americana come l'involuppo di Snell del processo di payoff scontato. Il tempo  $\nu_0 = \inf\{n \geq 0 : \tilde{U}_n = \tilde{Z}_n\}$ : proprietà di martingala per  $(\tilde{U}_n^{\nu_0})_{0 \leq n \leq N}$ . Dimostrazione della proprietà  $U_0 = \sup_{\nu \in \mathcal{T}_{0,N}} \mathbb{E}^*(\tilde{Z}_\nu)$  e ottimalità di  $\nu_0$  ( $U_0 = \mathbb{E}^*(\tilde{Z}_{\nu_0})$ ). Definizione formale di "istante di esercizio ottimale" e caratterizzazione matematica. Richiami sulla decomposizione di Doob: il compensatore di una supermartingala arrestata come il compensatore arrestato; caso particolare: il processo arrestato di una supermartingala è una martingala se e solo se il compensatore arrestato è identicamente nullo. Uso della decomposizione di Doob  $\tilde{U}_n = \tilde{M}_n + \tilde{A}_n$ ,  $n \leq N$ , per determinare una strategia ammissibile  $\phi$  tale che  $V_\tau(\phi) = Z_\tau$  per ogni tempo ottimale di esercizio  $\tau$  (copertura esatta delle opzioni

americane). Il tempo di esercizio ottimale  $\nu_* = \inf\{n \geq 0 : \tilde{A}_{n+1} > 0\}$ . Caratterizzazione dell'istante di esercizio ottimale come un tempo d'arresto compreso tra  $\nu_0$  e  $\nu_*$  in cui prezzo e payoff coincidono. Riscrittura di tutte le proprietà su un generico orizzonte temporale  $[n, N]$ ,  $n = 0, 1, \dots, N$ . Opzione europea associata e relazione tra prezzo americano e prezzo europeo. Caso dell'opzione call: uguaglianza tra prezzo americano ed europeo. La formula della funzione-prezzo della put americana nel modello CRR: versione "all'indietro" (dal principio di programmazione dinamica) e formulazione variazionale. Le proprietà (continuità, monotonia e convessità) e discussione qualitativa.

Programmi da consegnare inerenti a questi argomenti:

- implementazione al calcolatore del principio di programmazione dinamica per il calcolo del prezzo della put americana nel modello CRR e disegno del grafico della funzione  $x \mapsto P_{\text{am}}(0, x)$  (Esercizio 5.1).

[cfr. Appunti, Cap. 5]

### Parte III. Metodi numerici per la finanza

#### Il metodo Monte Carlo

Metodi Monte Carlo: generalità. L'intervallo di fiducia come output standard. Applicazione: calcolo del prezzo di opzioni nel modello CRR. Simulazione del modello CRR. Stima del prezzo di call/put standard con il metodo Monte Carlo e studio empirico della velocità di convergenza al valore esatto quando il numero di simulazioni tende a  $+\infty$ . Opzioni asiatiche: prezzo di call/put asiatiche con la tecnica Monte Carlo. Confronto con il prezzo della call/put standard. Formule di parità per il prezzo dell'opzione call/put asiatica ed uso per la validazione del programma. Opzioni con barriere ((up,down)&(in,out), double&(in,out)): calcolo del prezzo con metodi Monte Carlo. Formule di parità per la validazione del programma. Copertura dinamica per opzioni europee. Put americana: simulazione del tempo ottimale di esercizio  $\nu_0$  e analisi statistiche. Copertura dinamica della put americana: il portafoglio che replica esattamente il payoff americano nell'istante di esercizio  $\nu_0$ .

[cfr. Appunti, Cap. 6]

Programmi da consegnare inerenti a questi argomenti:

- calcolo numerico con il metodo Monte Carlo del prezzo di:
  - call/put standard, con studio empirico della convergenza ai risultati forniti dalle formule esatte quando il numero di simulazioni  $Q$  tende a  $+\infty$  (Esercizio 6.1);
  - call/put asiatica, e uso delle formule di parità per la validazione del programma (Esercizio 6.2);
  - call/put con barriere, e uso delle formule di parità per la validazione del programma (Esercizio 6.3);

- copertura dinamica per una call europea (Esercizio 6.4);
- simulazione (sotto  $\mathbb{P}^*$ ) dell'istante ottimale di esercizio  $\nu_0$  per una put americana e validità della formula  $P_{am}(0, S_0) = \mathbb{E}^*((1+r)^{-\nu_0}(K - S_{\nu_0})_+)$  calcolando numericamente la media con la tecnica Monte Carlo (Esercizio 6.5);
- simulazione sotto una generica misura  $\mathbb{P}$  dell'istante ottimale di esercizio  $\nu_0$  e analisi statistiche: stima Monte Carlo della media, della varianza e della distribuzione di  $\nu_0$  (Esercizio 6.6);
- copertura dinamica per una put americana e calcolo del portafoglio che replica il payoff nell'istante di esercizio ottimale (Esercizio 6.7).

#### **Parte IV. Approfondimenti: tassi di interesse<sup>2</sup>**

Modelli discreti per la descrizione dei tassi d'interesse. Tassi short: modelli affini e il modello di Hull-White discreto. Tassi forward: modello binomiale e multinomiale. Gestione dei derivati di tassi (caps e floor, swaps).

[cfr Pascucci e Runggaldier, Cap. 4, Par. da 4.1 a 4.5]

---

<sup>2</sup>Questa parte è riservata agli studenti di Laurea Magistrale che devono sostenere l'esame per 8 cfu.