MMMF - Metodi e Modelli dei Mercati Finanziari
AA 2018/2019

Informazioni e programma del corso
Università Tor Vergata
docente: Lucia Caramellino[1]

Informazioni sul corso

Prerequisiti

Per una buona preparazione all'esame è consigliato il corso EP/1-Elementi di Probabilità 1 (o comunque un corso su calcolo stocastico). Per quanto riguarda gli strumenti finanziari, una buona introduzione viene fatta in Probabilità e Finanza (consigliato ma non essenziale).

Modalità d'esame

L'esame consiste in una prova orale, che comprende anche una discussione sugli algoritmi di simulazione analizzati durante il corso. I programmi con l'implementazione degli algoritmi vanno consegnati al docente almeno una settimana prima della data d'esame (tramite supporto oppure via e-mail all'indirizzo: `caramell@mat.uniroma2.it`; nel programma che segue sono elencati tutti gli esercizi richiesti). Si fa esplicita richiesta di utilizzo di un *linguaggio di programmazione* (ad es. C, C++, Pascal etc., ma non Scilab o analoghi *software*), a scelta dello studente.

Testi consigliati

- P. Baldi: *Stochastic Calculus. An Introduction Through Theory and Exercis.* Springer, Universitext, 2017.
- D. Lamberton, B. Lapeyre: *Introduction to stochastic calculus applied to finance.* Chapman and Hall, 1996.
- D. Lamberton: *Optimal stopping and American options.* Ljubljana Summer School on Financial Mathematics, 2009.
- P. Glasserman: *Monte Carlo methods in financial engineering.* Springer-Verlag, 2004.
- Appunti su *Metodi Monte Carlo in Finanza* distribuiti dal docente.

[1]Dipartimento di Matematica, Università di Roma-Tor Vergata, email: `caramell@mat.uniroma2.it`; web: `www.mat.uniroma2.it/~caramell`

- Appunti su *Introduzione al Calcolo di Malliavin e applicazioni in Finanza* distribuiti dal docente.

Gli appunti si possono richiedere via email all'indirizzo `caramell@mat.uniroma2.it`

Programma

PARTE I: opzioni europee e metodi Monte Carlo

Richiami di calcolo stocastico

Richiami di calcolo stocastico: integrale di Ito, processi di Ito, formula di Ito. Il teorema di Girsanov. Il teorema di rappresentazione delle martingale Browniane. La caratterizzazione delle misure equivalenti su $(\Omega, \mathscr{F}_T)$, dove $\mathscr{F}_T$ è la σ-algebra generata da un moto browniano e completata con gli insiemi di misura nulla. Richiami di calcolo stocastico: equazioni differenziali stocastiche (teorema di esistenza ed unicità, stime in L^p, markovianità della soluzione).

[cfr. Baldi, Cap. 7, 8, 9 e 12.1, 12.3, 12.4; Lamberton e Lapeyre, Capitolo 3]

Il modello di Black e Scholes

Il modello di Black e Scholes. Stragie autofinanzianti, ammissibili, replicanti. Portafoglio replicabile. Prezzo delle opzioni europee. Le formule di Black e Scholes per il prezzo e la copetrura di opzioni call/put. Alcuni problemi riconducibili al modello di Black e Scholes: il modello a coefficienti dipendenti dal tempo; il modello di Garman-Kohlhagen (opzioni su valute); opzioni di scambio; opzioni composte call su call; opzioni asiatiche.

[cfr. Lamberton e Lapeyre, Capitolo 4 e Problemi 1, 2, 3, 5, 7 al Cap. 4]

Modelli con rumore browniano per i mercati finanziari

Modelli di Ito per l'evoluzione dei prezzi in un mercato finanziario. Strategie autofinanzianti e ammissibili; misure di martingala equivalenti; arbitraggio; strategie replicanti. Completezza del mercato; prezzo di opzioni europee. Modelli di diffusione per i mercati finanziari: caratterizzazione della misura di martingala equivalente; la condizione sufficiente classica sulla volatilità che garantisce l'esistenza della misura equivalente di martingala (dimensione browniano $\geq$ numero di sottostanti e $\sigma\sigma^*$ uniformemente ellittica); teorema classico di completezza del mercato. Equazione alle derivate parziali associata al prezzo di un'opzione europea; le greche di un'opzione europea. Formule di rappresentazione per soluzioni di equazioni alle derivate parziali paraboliche in un dominio limitato (problema di Cauchy-Dirichlet) e paraboliche su $\mathbb{R}^m$ (problema di Cauchy); formula di Feynman-Kac. Connessioni con la finanza.

[cfr note di P. Baldi, Cap 13 e Par. 10.3, 10.4]

Metodi numerici per la finanza

Il metodo Monte Carlo: stima di medie ed intervallo di confidenza. Simulazione del moto Browniano e del moto Browniano geometrico. Metodi numerici per la finanza: uso del metodo Monte Carlo. In particolare, seguendo il modello di Black e Scholes, si richiede l'implementazione un programma per il:

- calcolo numerico del prezzo della call e della put, con intervallo di confidenza al 95% e studio numerico della convergenza del prezzo call/put alla formula di Black e Scholes;

- calcolo numerico del prezzo di una call asiatica, con intervallo di confidenza al 95%;

- calcolo numerico del prezzo di un'opzione call con barriera superiore (up-and-in e up-and-out) usando sia lo stimatore approssimato sia lo stimatore non distorto, con intervallo di confidenza al 95%;

- calcolo numerico del prezzo di un'opzione di scambio e di una digital su due sottostanti, con intervallo di confidenza al 95%;

- calcolo numerico della delta con le differenze finite e tramite la rappresentazione delle derivate come opportune aspettazioni;

- calcolo della copertura dinamica e uguaglianza finale con il *payoff* dell'opzione.

[cfr appunti su *Metodi Monte Carlo in Finanza* o anche Glasserman]

PARTE II: approfondimenti

Sviluppare un argomento scelto[2] tra i seguenti.

1. Tassi d'interesse

Il mercato degli "zero-coupon bonds"; il rumore di mercato modellizzato con un rumore browniano e la modellizzazione della curva dei tassi con processi di diffusione. I problemi matematici associati: la misura di rischio neutro, la dinamica dei prezzi dei bonds, le opzioni su bonds. Alcuni modelli per il tasso di interesse: Vasiceck, CIR e HJM. Si richiede la risoluzione di tutti gli esercizi al Cap. 6 del libro di Lamberton e Lapeyre (in particolare le formule chiuse nel caso HJM dell'esercizio 38, pag. 138).

[cfr Lamberton e Lapeyre, Cap. 6 ed esercizi al Cap. 6]

2. Introduzione al Calcolo di Malliavin e applicazioni in Finanza

Lo spazio S dei funzionali semplici e lo spazio P dei processi semplici; la derivata di Malliavin come operatore $D : S \to P$ e l'integrale di Skorohod come operatore $\delta : P \to S$; le tre proprietà findamentali: dualità, chain rule e integrale di Skorohod "per un prodotto speciale"; estensione al caso infinito dimensionale: gli spazi $Dom_p(D) = \mathbb{D}^{1,p}$, $Dom_p(\delta)$, $p \geq 2$, e $Dom_\infty(D) = \mathbb{D}^{1,\infty}$, $Dom_\infty(\delta)$; la derivata di Malliavin D, l'integrale di Skorohod δ e le tre proprietà fondamentali; gli spazi $\mathbb{D}^{k,p}$ e $\mathbb{D}^{k,\infty}$. La formula di integrazione per

[2] Potranno essere presi in considerazione altri argomenti di approfondimento proposti dagli studenti.

parti alla Malliavin ed uso per il calcolo delle greche. La formula di Clark-Ocone ed uso per la rappresentazione della copertura delle opzioni.

[cfr Appunti su Calcolo di Malliavin e applicazioni in Finanza, Cap. 2 (esclusa appendice Par. 2.6) e Cap. 3 (escluso Par. 3.3)]

3. Opzioni americane

Il problema dell'arresto ottimo: l'inviluppo di Snell, la decomposizione di Doob-Meyer. Prezzo e copertura delle opzioni americane: strategie ammissibili, opzioni americane e inviluppo di Snell, funzione-prezzo. Il caso delle equazioni differenziali stocastiche. Prezzo di opzioni call e put nel modello Black e Scholes; proprietà analistiche della funzione-prezzo. La disuguaglianza variazionale.

[cfr Lamberton, cap$\geq$ 2 degli appunti della scuola estiva di Lubiana 2009, con la condizione di porre i dividendi uguali a 0; gli appunti sono disponibili all'indirizzo `http://www.fmf.uni-lj.si/finmath09/ShortCourseAmericanOptions.pdf`]