Diario delle lezioni di

Probabilità e Finanza

a.a. 2018/2019

`www.mat.uniroma2.it/~caramell/did_1819/pf.htm`

02/10/2018 - Lezioni 1, 2

Introduzione al corso. Richiami di probabilità: le algebre e le σ-algebre. Esercizi. La σ-algebra generata da una classe di sottoinsiemi. Esempi: $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$ quando $\mathcal{C}$ è una σ-algebra; $\sigma(\mathcal{C}_1) \subset \sigma(\mathcal{C}_2)$ quando $\mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}_2$. La σ-algebra generata da una partizione al più numerabile. La σ-algebra di Borel. Le classi generatrici di $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ (intervalli aperti, semichiusi, chiusi, etc.). La classe $\pi(\mathbb{R}) = \{(-\infty, c] : c \in \mathbb{R}\}$ come classe che genera $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

[cfr. Appunti, Par. 2.1.1]

03/10/2018 - Lezioni 3, 4

Spazi misurabili e funzioni misurabili. La σ-algebra generata da una funzione misurabile e la sua caratterizzazione in termini di controimmagini. Condizioni sufficienti per la verifica della misurabilità. Caso particolare per funzioni a valori reali. Funzioni discrete: definizione, misurabilità, la σ-algebra generata come una σ-algebra generata da una partizione numerabile. Proprietà delle funzioni misurabili: la classe delle funzioni misurabili come un'algebra; misurabilità della funzione composta di funzioni misurabili; misurabilità dell'inf, del sup etc. di una successione di funzioni misurabili; $\sigma(f) = \sigma(g)$ quando $f = h_1 \circ g$ e $g = h_1 \circ f$, con f, g, h_1, h_2 misurabili.

[cfr. Appunti, Par. 2.1.2]

09/10/2018 - Lezioni 5, 6

Proprietà delle funzioni misurabili: data una partizione $\mathcal{C}$ al più numerabile, se f è $\sigma(\mathcal{C})$-misurabile allora f è costante su tutti gli elementi della partizione. Date due funzioni $\mathcal{S}$-misurabili f e g, se g è $\sigma(f)$-misurabile allora $g = h \circ f$, per un'opportuna funzione misurabile h (s.d.).
Definizione di uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Esempio: se $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{C})$ con $\mathcal{C}$ partizione al più numerabile di Ω allora $\mathbb{P}$ è perfettamente individuata dal valori $\mathbb{P}(C)$, al variare di $C \in \mathcal{C}$. Le proprietà generali della probabilità $\mathbb{P}$ e la proprietà di monotonia (richiami). Indipendenza tra eventi, legame con la proprietà di fattorizzazione delle σ-algebre generate da questi eventi. La definizione di σ-algebre indipendenti. Esempio: quando le σ-algebre sono generate da partizioni al più numerabili basta provare la proprietà di fattorizzazione solo sugli elementi delle partizioni.

[cfr. Appunti, Par. 2.1.2, 2.2]

10/10/2018 - Lezioni 7, 8

Definizione formale di v.a. Caso particolare: v.a. discrete, finite, a valori in $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$. La definizione di v.a. indipendenti in termini delle σ-algebre generate. Definizione di indipendenza tra una v.a. ed una σ-algebra. Le proprietà delle v.a. Definizione di legge di una v.a. V.a. discrete: densità dicreta; densità discreta congiunta e calcolo delle marginali; caratterizzazione dell'indipendenza in termini di densità; densità della somma; densità discreta condizionale.

[cfr. Appunti, Par. 2.3.1, 2.3.2]

16/10/2018 - Lezioni 9, 10

V.a. assolutamente continue (a.c.): densità continua; densità congiunta e calcolo delle marginali; caratterizzazione dell'indipendenza in termini di densità; densità della somma. Speranza matematica: definizione per v.a. discrete o a.c. L'esistenza ed il calcolo della speranza matematica di $f(X)$ quando X è una v.a. discreta oppure a.c. La media di una v.a. discreta come somma su Ω (e non sullo spazio di arrivo). Richiami: le proprietà della speranza matematica (linearità, positività etc.); la media del prodotto di v.a. indipendenti che hanno media; caratterizzazione dell'indipendenza in termini di fattorizzazione della speranza matematica ($X \perp\!\!\!\perp Y$ sse $\mathbb{E}(f(X)g(Y)) = \mathbb{E}(f(X))\mathbb{E}(g(Y))$ per ogni f, g boreliane tali che $f(X)$ e $g(Y)$ abbiano media); momento k-esimo, in particolare: se esiste il momento k-esimo allora esiste il momento p-esimo per ogni $p \leq k$; la varianza e il suo significato; le disuguaglianze di Markov, di Chebycev, di Schwarz.

[cfr. Appunti, Par. 2.3.1, 2.3.2, 2.3.3]

17/10/2018 - Lezioni 11, 12

Introduzione alla speranza matematica condizionale: il caso di v.a. discrete ed il caso di σ-algebra generata da una partizione al più numerabile di Ω. Definizione formale di $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})$. Caso particolare: quando $\mathcal{G} = \sigma(Y)$, quindi $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) = \mathbb{E}(X \mid Y) = \Psi_X(Y)$, con Ψ_X funzione boreliana. Esempio: calcolo esplicito della funzione Ψ_X quando X e Y hanno densità congiunta continua.

[cfr. Appunti, Par. 3.1.1, 3.1.2]

23/10/2018 - Lezioni 13, 14

Le proprietà della media condizionale: se $X = c$ q.c. allora $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) = c$ q.c.; $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})) = \mathbb{E}(X)$; linearità, positività e monotonia della media condizionale; la disuguaglianza di Jensen per la media e per la media condizionale; se X è $\mathcal{G}$-misurabile allora $\mathbb{E}(XY \mid \mathcal{G}) = X\mathbb{E}(Y \mid \mathcal{G})$; se $\mathcal{A} \subset \mathcal{G}$ sotto σ-algebre di $\mathcal{F}$ allora $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{A}) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X \mid \mathcal{A}) \mid \mathcal{G}) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) \mid \mathcal{A})$; se $X \perp\!\!\!\perp \mathcal{G}$ allora $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) = \mathbb{E}(X)$; se X è $\mathcal{G}$-misurabile e $Y \perp\!\!\!\perp \mathcal{G}$ allora $\mathbb{E}(f(X,Y) \mid \mathcal{G}) = \mathbb{E}(f(x,Y))|_{x=X}$; se X è di quadrato integrabile allora $\mathbb{E}(X - \mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})^2) \leq \mathbb{E}((X - Z)^2)$ per ogni v.a. Z di quadrato integrabile e $\mathcal{G}$-misurabile.
Processi a tempo discreto. Filtrazioni, processi adattati. Definizione di martingala (mg), supermartingala (supermg) e submartingala (submg).

[cfr. Appunti, Par. 3.1.3, 3.2.1]

31/10/2018 - Lezioni 15, 16

Esempi di martingale, submartingale e supermartingale. Le proprietà. La decomposizione di Doob ed il compensatore.

[cfr. Appunti, Par. 3.2.1, 3.2.2, 3.2.3]

06/11/2018 - Lezioni 17, 18

Esempio: data una $\mathcal{F}_n$-martingala $(X_n)_n$ di quadrato integrabile, calcolo del compensatore di $(X_n^2)_n$. Le martingale trasformate.
Tempi d'arresto e σ-algebra degli eventi antecendenti: definizione e definizioni equivalenti. Proprietà dei tempi d'arresto, ad esempio: il tempo di ingresso/di uscita di un processo adattato è un tempo d'arresto; se τ_1 e τ_2 sono $\mathcal{F}_n$-t.a. allora $\tau_1 \wedge \tau_2$ è un $\mathcal{F}_n$-t.a.; se τ_1 e τ_2 sono $\mathcal{F}_n$-t.a. tali che $\tau_1 \leq \tau_2$ allora $\mathcal{F}_{\tau_1} \subset \mathcal{F}_{\tau_2}$; se τ_1 e τ_2 sono $\mathcal{F}_n$-t.a. allora $\mathcal{F}_{\tau_1 \wedge \tau_2} = \mathcal{F}_{\tau_1} \cap \mathcal{F}_{\tau_2}$; se $(X_n)_n$ è un processo $\mathcal{F}_n$-adattato e τ è un $\mathcal{F}_n$-t.a. finito allora X_τ è una v.a. $\mathcal{F}_\tau$-misurabile; se X è una v.a. integrabile e τ è un $\mathcal{F}_n$-t.a. allora $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}_\tau) = X_\tau$, dove $X_n = \mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}_n)$, $n \geq 0$.

[cfr. Appunti, Par. 3.2.4, 3.3]

07/11/2018 - Lezioni 19, 20
Il processo arrestato $X_n^\tau = X_{\tau\wedge n}$: se $(X_n)_n$ è una $\mathcal{F}_n$-mg (risp. submg, supermg) e τ è un $\mathcal{F}_n$-t.a. allora $(X_n^\tau)_n$ rimane una $\mathcal{F}_n$-mg (risp. submg, supermg). Il compensatore di una submg o supermg arrestata è il compensatore arrestato. Il teorema d'arresto.
Tassi di interesse: interesse composto, semplice, istantaneo. Esercizi sui tassi.

[cfr. Appunti, Par. 3.3, 3.3.1; 1.1]

13/11/2018 - Lezioni 21, 22
Alcuni aspetti dei mercati finanziari: la vendita allo scoperto; l'arbitraggio; le ipotesi di mercato. Generalità sui prodotti derivati. Contratti forward: valutazione di "non arbitraggio" del prezzo forward (prezzo di consegna). Le opzioni di acquisto (call) e di vendita (put). Le opzioni come strumenti finanziari per la gestione dei rischi. Il payoff dell'opzione call/put. Il problema del prezzo e della copertura dell'opzione.
Il modello discreto per la descrizione dei mercati finanziari: la filtrazione, il processo $d+1$-dimensionale dei prezzi, il fattore di sconto ed il processo dei prezzi scontati. Strategie di gestione e portafoglio associato. Strategie autofinanzianti.

[cfr. Appunti, Par. 1.2, 1.3; 4.1, 4.2, 4.3]

14/11/2018 - Lezioni 23, 24
Caratterizzazione delle strategie autofinanzianti in termini di scrittura del portafoglio e del portafoglio scontato. Dati un processo predicibile $(\phi_n^1, \dots, \phi_n^d)_n$ a valori in $\mathbb{R}^d$ e $V_0 \in \mathbb{R}$ esiste un unico processo predicibile $(\phi_n^0)_n$ tale che $(\phi_n^0, \phi_n^1, \dots, \phi_n^d)_n$ sia una strategia autofinanziante. Strategie ammissibili e strategie di arbitraggio. Definizione di mercato privo di arbitraggio. Il cono convesso Γ ed il risultato (Lemma 4.4.3) che lega la mancanza di arbitraggio con Γ.

[cfr. Appunti, Par. 4.3, 4.4]

20/11/2018 - Lezioni 25, 26, 27
Il primo teorema fondamentale dell'asset pricing. Conseguenze dell'esistenza della misura di martingala equivalente, ad esempio la formula di parità call-put. Mancanza di abitraggio nel modello binomale e del modello trinomiale ad un periodo: studio dell'esistenza della misura di martingala equivalente ed eventuale unicità. Definizione formale di un'opzione europea. Esempi: opzioni call, put, digital, asiatiche, con barriere.

[cfr. Appunti, Par. 4.4, 4.5]

21/11/2018 - Lezioni 28, 29
Opzioni replicabili e prezzo "di non arbitraggio". Completezza del mercato. Il secondo teorema fondamentale dell'asset pricing. Esempio: in mancanza di arbitraggio, il modello binomiale ad un periodo è completo ma il modello trinomiale ad un periodo non lo è. La formula di parità call-put con l'uso esplicito del prezzo (portafoglio replicante).

[cfr. Appunti, Par. 4.5]

27/11/2018 - Lezioni 30, 31, 32
Il modello CRR (Cox, Ross e Rubinstein): definizione, proprietà. Equivalenza tra mancanza di arbitraggio e la condizione $a < r < b$. Completezza del mercato. Formula esplicita del prezzo e della strategia replicante per opzioni di payoff $h = F(S_N)$.

[cfr. Appunti, Par. 4.6.1, 4.6.2]

28/11/2018 - Lezioni 33, 34
Formula *backward* del prezzo di opzioni si payoff $h = F(S_N)$ nel modello CRR. Uso pratico del modello CRR: suddivisione dell'intervallo $[0, T]$ in N sottointervalli, scelta del tasso ($r_N = RT/N$) e dei salti ($1+a_N = (1+r_N)e^{-\sigma\sqrt{T/N}}$ e $1+b_N = (1+r_N)e^{\sigma\sqrt{T/N}}$) in modo da costruire un mercato completo. La volatilità $\sigma > 0$. Comportamento asintotico, per $N \to \infty$, della funzione caratteristica di $\log \widetilde{S}_N^N/S_0$ sotto la misura di rischio neutro.

[cfr. Appunti, Par. 4.6.2, 4.6.3]

04/12/2018 - Lezioni 35, 36, 37
Convergenza in legge, per $N \to \infty$, di $\log \widetilde{S}_N^N/S_0$ ad una normale di media $-\sigma^2 T/2$ e varianza $\sigma^2 T$. Le formule di Black e Scholes per il prezzo della call e della put come limite, per $N \to \infty$, del valore della call e della put nel modello CRR. Prezzo Black e Scholes di call/put come funzione crescente del parametro volatilità - interpretazione finanziaria. Esercizio al calcolatore: studio empirico (in scala logaritmica) della convergenza.
Opzioni americane nel modello generale, in ipotesi di completezza del mercato. Il processo-payoff. La formulazione "all'indietro" del prezzo dell'opzione americana. Payoff e prezzo scontati: formulazione "all'indietro" del prezzo scontato dell'opzione americana in termini del processo di payoff scontato. Il prezzo scontato dell'opzione americana come l'inviluppo di Snell del processo di payoff scontato. Il tempo $\nu_0 = \inf\{n \geq 0 : \widetilde{U}_n = \widetilde{Z}_n\}$: proprietà di martingala per $(\widetilde{U}_n^{\nu_0})_{0 \leq n \leq N}$.

[cfr. Appunti, Par. 4.6.3, 4.6.4, 5.1, 5.2]

05/12/2018 - Lezioni 38, 39
Dimostrazione della proprietà $U_0 = \sup_{\nu \in \mathcal{T}_{0,N}} \mathbb{E}^*(\widetilde{Z}_\nu)$ e ottimalità di ν_0 ($U_0 = \mathbb{E}^*(\widetilde{Z}_{\nu_0})$). Definizione formale di "istante di esercizio ottimale" e caratterizzazione matematica. Uso della decomposizione di Doob per determinare una strategia ammissibile ϕ tale che $V_\tau(\phi) = Z_\tau$ per ogni tempo ottimale di esercizio τ (copertura esatta delle opzioni americane). Il tempo di esercizio ottimale $\nu_* = \inf\{n \geq 0 : \widetilde{A}_{n+1} > 0\}$. Caratterizzazione degli istanti di esercizio ottimale come i tempi d'arresto compresi tra ν_0 e ν_* in cui prezzo e payoff coincidono. Riscrittura di tutte le proprietà su un generico orizzonte temporale $[n, N]$, $n = 0, 1, \ldots, N$. Opzione europea associata e verifica del fatto che il prezzo dell'opzione americana è sempre maggiore od uguale al prezzo dell'europea associata.

[cfr. Appunti, Par. 5.2, 5.3]

11/12/2018 - Lezioni 40, 41, 42
Opzione call: uguaglianza tra prezzo americano ed europeo. La formula della funzione prezzo della put americana nel modello CRR: versione backward (dal principio di programmazione dinamica) e formulazione variazionale. Le proprietà (continuità, monotonia e convessità) e discussione qualitativa. Esercizio al calcolatore: implementazione del principio di programmazione dinamica e disegno della funzione $x \mapsto P_{am}(0, x)$.
Metodi Monte Carlo: generalità. L'intervallo di fiducia come output standard. Applicazione: calcolo del prezzo di opzioni. Breve discussione sulla generazione al calcolatore di numeri a caso nell'intervallo $(0, 1)$. L'algoritmo KNUTH.

[cfr. Appunti, Par. 5.3, 5.4, 6.1]

12/12/2018 - Lezioni 43, 44
Simulazione del modello CRR. Stima del prezzo di call/put standard con il metodo Monte Carlo e studio empirico della velocità di convergenza al valore esatto quando il numero di simulazioni tende a $+\infty$. Opzioni asiatiche: prezzo di call/put asiatiche con la tecnica Monte Carlo. Formule di parità per il prezzo dell'opzione call/put asiatica ed uso per la validazione del programma. Opzioni con barriere

(up,down)&(in,out): calcolo del prezzo con metodi Monte Carlo. Formule di parità per la validazione del programma.

[cfr. Appunti, Par. 6.3.2, 6.3.3]

18/12/2018 - Lezioni 45, 46
Copertura dinamica per opzioni europee. Discussione ed approfondimenti sugli algoritmi numerici.

[cfr. Appunti, Par. 6.4]

19/12/2018 - Lezioni 47, 48
Put americana: simulazione del tempo ottimale di esercizio ν_0. Calcolo del prezzo americano con Monte Carlo a partire dalla formula del prezzo come esapettazione del payoff scontato al tempo ν_0. Analisi statistiche di ν_0: calcolo della media, della varianza e della distribuzione con tecniche Monte Carlo. Copertura dinamica della put americana: il portafoglio che replica esattamente il payoff americano nell'istante di esercizio ν_0.

[cfr. Appunti, Par. 6.5]