

Diario delle lezioni di
Metodi e Modelli dei Mercati Finanziari
a.a. 2018/2019
www.mat.uniroma2.it/~caramell/did_1819/mmmf.htm

PARTE I: **OPZIONI EUROPEE E METODI MONTE CARLO**

Lezioni 1, 2 - 02/10/2018

Breve introduzione al corso. Richiami di calcolo stocastico: integrale di Ito, processi di Ito, formula di Ito. Cambi di misure. Introduzione al teorema di Girsanov.

[cfr. Baldi, Cap. 7, 8, Par. 12.1; Lamberton e Lapeyre, Cap. 3]

Lezioni 3, 4 - 05/10/2018

Risultati generali sulla “martingala esponenziale (complessa)”. Il teorema di Girsanov.

[cfr. Baldi, Par 12.1; Lamberton e Lapeyre, Cap. 3]

Lezioni 5, 6 - 09/10/2018

I teoremi di rappresentazione delle martingale browniane. Conseguenza: se $(M_t)_{t \in [0, T]}$ è una martingala locale browniana tale che $\sup_{t \leq T} |M_t|$ è di quadrato integrabile allora $(M_t)_{t \in [0, T]}$ è una martingala browniana e, a meno di una costante, si rappresenta come integrale stocastico di un processo in $M^2[0, T]$.

[cfr. Baldi, Par 12.3; Lamberton e Lapeyre, Cap. 3 - vd esercizio 15, punto 1.]

Lezioni 7, 8 - 10/10/2018

Caratterizzazione delle misure equivalenti su (Ω, \mathcal{F}_T) , dove $\mathcal{F}_T = \sigma(B_s, s \leq T) \vee \mathcal{N}$ ($B =$ browniano, $\mathcal{N} =$ insiemi di misura nulla). Ancora richiami di calcolo stocastico: equazioni differenziali stocastiche (teorema classico di esistenza ed unicità, stime in L^p e markovianità della soluzione).

[cfr. Baldi, Par. 12.4 e Cap. 9; Lamberton e Lapeyre, Cap. 4]

Lezioni 9, 10 - 12/10/2018

Introduzione alla finanza. Le opzioni e i due problemi ad esse associati: prezzo e copertura. Il modello di Black e Scholes. Strategie di mercato e portafoglio. Prezzo e portafoglio scontati. Strategie autofinanzianti: caratterizzazione in termini della dinamica del portafoglio scontato.

[cfr. Lamberton e Lapeyre, Cap. 4]

Lezioni 11, 12 - 16/10/2018

La misura “equivalente di martingala” o “di rischio neutro”. Strategie ammissibili e replicanti. Il teorema di replicabilità delle opzioni europee di quadrato integrabile sotto la misura di rischio neutro. Il prezzo delle opzioni europee.

[cfr. Lamberton e Lapeyre, Cap. 4]

Lezioni 13, 14 - 17/10/2018

Opzioni il cui payoff dipende dal sottostante a maturità: la funzione-prezzo. La formula di Black e Scholes per l'opzione call. La formula di parità per opzioni call/put e la formula per la funzione-prezzo della put. Le Greche di un'opzione. L'equazione alle derivate parziali per la funzione-prezzo ed il calcolo della copertura (strategia replicante).

[cfr. Lamberton e Lapeyre, Cap. 4]

Lezioni 15, 16 - 19/10/2018

Il modello di Black e Scholes con coefficienti dipendenti dal tempo (con particolare attenzione alla scelta delle ipotesi meno restrittive per le funzioni r_t, μ_t, σ_t).

[cfr. Lamberton e Lapeyre, Cap. 4, Problema 1]

Lezioni 17, 18 - 23/10/2018

Il modello di Garman-Kohlhagen per opzioni su valuta estera.

[cfr. Lamberton e Lapeyre, Cap. 4, Problema 2]

Lezioni 19, 20 - 31/10/2018

Opzioni di scambio su due sottostanti nel modello di Black e Scholes.

[cfr. Lamberton e Lapeyre, Cap. 4, Problema 3]

Lezioni 21, 22 - 06/11/2018

Opzione composta call su call.

[cfr. Lamberton e Lapeyre, Cap. 4, Problema 5]

Lezioni 23, 24 - 07/11/2018

Opzione call asiatica (parte 1).

[cfr. Lamberton e Lapeyre, Cap. 4, Problema 7]

Lezioni 25, 26 - 09/11/2018

Opzione call asiatica (parte 2).

Modelli generali (di Ito) per la finanza: il “rumore” descritto tramite un browniano in \mathbb{R}^d , il prezzo del titolo non rischioso con un tasso di interesse istantaneo aleatorio, i prezzi degli m titoli rischiosi descritti tramite processi di Ito. Definizione di opzione europea. Le strategie autofinanzianti e la loro caratterizzazione usando il portafoglio scontato. Le strategie ammissibili e di arbitraggio. Definizione di mercato privo di arbitraggio. La misura equivalente di martingala \mathbb{P}^* : esistenza. Il moto browniano sotto \mathbb{P}^* .

[cfr. Lamberton e Lapeyre, Cap. 4, Problema 7; Baldi, Par. 13.1, 13.2, 13.3]

Lezioni 27, 28 - 13/11/2018

Dinamica dei prezzi scontati sotto una misura equivalente di martingala \mathbb{P}^* e il sistema lineare per la determinazione della densità di \mathbb{P}^* rispetto a \mathbb{P} . Le proprietà di martingala del portafoglio scontato associato a strategie autofinanzianti e ammissibili. Strategie replicanti e prezzo di “non arbitraggio” per un’opzione replicabile in presenza di una misura equivalente di martingala. Indipendenza del prezzo dalla misura equivalente di martingala. Definizione di mercato completo ed unicità della misura equivalente di martingala in un mercato completo.

[cfr. Baldi, Par. 13.3, 13.4]

Lezioni 29, 30 - 14/11/2018

Il modello di diffusione per la descrizione dei mercati finanziari: definizione, richieste sui coefficienti del modello.

Condizione necessaria e sufficiente per l’esistenza della misura equivalente di martingala. La condizione sufficiente classica sulla volatilità che garantisce l’esistenza della misura equivalente di martingala (dimensione browniano \geq numero di sottostanti e $\sigma\sigma^*$ uniformemente ellittica).

[cfr. Baldi, Par. 13.5]

Lezioni 31, 32 - 16/11/2018

Teorema classico di completezza del mercato. Breve discussione sui mercati non completi.

[cfr. Baldi, Par. 13.5]

Lezioni 33, 34 - 21/11/2018

Equazione alle derivate parziali associata al prezzo di un’opzione europea quando esiste la funzione-prezzo ed è noto essere regolare; la strategia di copertura come il gradiente della funzione-prezzo. La regolarità della funzione-prezzo di un’opzione europea di payoff dipendente dal prezzo dei titoli a maturità: legame con EDP paraboliche. Operatori differenziali lineari del secondo ordine uniformemente ellittici e diffusione sottostante. La regolarità della funzione-prezzo come conseguenza del teorema di esistenza ed unicità (forte) di una EDP parabolica con termine del secondo ordine uniformemente ellittico (cambio di variabile).

[cfr. Baldi, Par. 13.6]

Lezioni 35, 36 - 23/11/2018

EDP paraboliche in un dominio limitato (problema di Cauchy-Dirichlet): formula di rappresentazione per la soluzione.

[cfr. Baldi, Par. 10.3]

Lezioni 37, 38 - 27/11/2018

La formula di Feynman-Kac per la rappresentazione delle soluzioni EDP paraboliche con problema di Cauchy su \mathbb{R}^m . Uso della formula di Feynman-Kac per determinare le condizioni sui coefficienti del modello e sulla funzione payoff affinché la funzione-prezzo sia una soluzione regolare dell’EDP parabolica associata. In particolare, calcolo della copertura tramite la formula di Ito.

[cfr. Baldi, Par. 10.4, 13.6]

Lezioni 39, 40 - 28/11/2018

Cenni sulla soluzione fondamentale di un problema parabolico e legame con la densità di transizione: stime gaussiane ed equazione backward. Panoramica sull'argomento di approfondimento "tassi di interesse": il mercato degli "zero-coupon bonds"; il rumore di mercato modellizzato con un rumore browniano; i problemi matematici associati: la misura di rischio neutro, la dinamica dei prezzi dei bonds, le opzioni su bonds; alcuni modelli per il tasso di interesse: Vasicek, CIR e HJM.

[cfr. Baldi, Par. 10.5; Lamberton e Lapeyre, Cap. 6]

Lezioni 41, 42 - 30/11/2018

Panoramica sui due argomenti approfondimento: "opzioni americane" (l'involuppo di Snell ed il problema dell'arresto ottimo; prezzo e copertura delle opzioni americane e istanti ottimali di esercizio) e "calcolo di Malliavin ed applicazioni in finanza" (il calcolo di Malliavin come strumento per la costruzione di formule (astratte, stocastiche) di integrazione per parti ed uso per lo studio delle sensitività di un'opzione; la formula di Clark-Ocone ed uso per la rappresentazione della copertura delle opzioni).

Metodi Monte Carlo: generalità. L'IC di output.

[cfr. Appunti; Appunti su metodi Monte Carlo, Par. 1]

Lezioni 43, 44 - 04/12/2018

Simulazione di v.a. gaussiane tramite il generatore di Box-Muller. Simulazione del moto browniano e del moto browniano geometrico. Calcolo numerico con tecniche Monte Carlo nel modello di Black e Scholes del prezzo di opzioni call/put standard. Confronto con le formule esatte e studio empirico della velocità di convergenza. Calcolo numerico con tecniche Monte Carlo nel modello di Black e Scholes del prezzo di opzioni asiatiche call/put standard. Uso delle formule di parità per la validazione del programma.

[cfr. Appunti su metodi Monte Carlo, Par. 2, 3.1.1, 3.1.2]

Lezioni 45, 46 - 05/12/2018

Opzioni con barriera: valutazione numerica del prezzo con Monte Carlo tramite (a) approssimazione del sup su $[0, T]$ con il max osservato ai tempi $t_1 < t_2 < \dots < t_N$ (stimatore Monte Carlo distorto) e (b) con una formula di rappresentazione che coinvolge solo il valore del sottostante a T (stimatore Monte Carlo non distorto). Formule di "parità" per la validazione dei programmi.

[cfr. Appunti su metodi Monte Carlo, Par. 3.1.3]

Lezioni 47, 48 - 07/12/2018

Opzioni su due sottostanti (call e digital) e relative formule di "parità" nel modello di Black-Scholes. Calcolo numerico via Monte Carlo della copertura: il metodo delle differenze finite (uso delle differenze centrate) e il metodo basato sulla rappresentazione della delta sotto forma di aspettazione.

Breve discussione sul calcolo del prezzo quando il processo sottostante è una diffusione qualsiasi (metodo di Eulero).

[cfr. Appunti su metodi Monte Carlo, Par. 3.1.4, 3.2]

Lezioni 49, 50 - 12/12/2018

Copertura dinamica.

[cfr. Appunti su metodi Monte Carlo, Par. 3.3]

Seminario - 18/12/2018

Seminario di Maya Briani (IAC-CNR, Roma) su trattamento numerico di EDP e applicazioni in finanza.

PARTE II: **APPROFONDIMENTI**

Le ulteriori ore a disposizione del corso seguono un corso di letture su un argomento a scelta tra:

- **MODELLI DI DIFFUSIONE PER I TASSI D'INTERESSE** [cfr. Lamberton e Lapeyre, Cap. 6 ed esercizi del Cap. 6]
- **INTRODUZIONE AL CALCOLO DI MALLIAVIN E APPLICAZIONI IN FINANZA** [cfr. Appunti]
- **OPZIONI AMERICANE** [cfr. Appunti di D. Lamberton]

Gli appunti si possono richiedere inviando un messaggio email al docente.