Diario delle lezioni di

Probabilità e Finanza

a.a. 2017/2018

`www.mat.uniroma2.it/~caramell/did_1718/pf.htm`

10/10/2017 - Lezioni 1, 2
Introduzione al corso. Richiami di probabilità: le algebre e le σ-algebre. Esercizi. La σ-algebra generata da una classe di sottoinsiemi. Esempi: $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$ quando $\mathcal{C}$ è una σ-algebra; $\sigma(\mathcal{C}_1) \subset \sigma(\mathcal{C}_2)$ quando $\mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}_2$. La σ-algebra generata da una partizione al più numerabile. La σ-algebra di Borel. Le classi generatrici di $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ (intervalli aperti, semichiusi, chiusi, etc.). La classe $\pi(\mathbb{R}) = \{(-\infty, c] : c \in \mathbb{R}\}$ come classe che genera $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

[cfr. Appunti, Par. 2.1.1]

13/10/2017 - Lezioni 3, 4
Spazi misurabili e funzioni misurabili. La σ-algebra generata da una funzione misurabile e la sua caratterizzazione in termini di controimmagini. Condizioni sufficienti per la verifica della misurabilità. Caso particolare per funzioni a valori reali. Funzioni discrete: definizione, misurabilità, la σ-algebra generata come una σ-algebra generata da una partizione numerabile.

[cfr. Appunti, Par. 2.1.2]

17/10/2017 - Lezioni 5, 6
Proprietà delle funzioni misurabili: la classe delle funzioni misurabili come un'algebra; misurabilità della funzione composta di funzioni misurabili; misurabilità dell'inf, del sup etc. di una successione di funzioni misurabili; $\sigma(f) = \sigma(g)$ quando $f = h_1 \circ g$ e $g = h_1 \circ f$, con f, g, h_1, h_2 misurabili; data una partizione $\mathcal{C}$ al più numerabile, se f è $\sigma(\mathcal{C})$-misurabile allora f è costante su tutti gli elementi della partizione. Date due funzioni $\mathcal{S}$-misurabili f e g, se g è $\sigma(f)$-misurabile allora $g = h \circ f$, per un'opportuna funzione misurabile h.
Definizione di uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Esempio: se $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{C})$ con $\mathcal{C}$ partizione al più numerabile di Ω allora $\mathbb{P}$ è perfettamente individuata dal valori $\mathbb{P}(C)$, al variare di $C \in \mathcal{C}$. Le proprietà generali della probabilità $\mathbb{P}$ e la proprietà di monotonia (richiami). Indipendenza tra eventi, legame con la proprietà di fattorizzazione delle σ-algebre generate da questi eventi. La definizione di σ-algebre indipendenti. Esempio: quando le σ-algebre sono generate da partizioni al più numerabili.

[cfr. Appunti, Par. 2.1.2, 2.2]

20/10/2017 - Lezioni 7, 8
Definizione formale di v.a. Caso particolare: v.a. discrete, finite, a valori in $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$. La definizione di v.a. indipendenti in termini delle σ-algebre generate. Definizione di indipendenza tra v.a. e σ-algebre. Le proprietà delle v.a. Definizione di legge di una v.a. V.a. discrete: densità dicreta; densità discreta congiunta e calcolo delle marginali; caratterizzazione dell'indipendenza in termini di densità; densità della somma; densità discreta condizionale. V.a. assolutamente continue (a.c.): densità continua; densità congiunta e calcolo delle marginali; caratterizzazione dell'indipendenza in termini di densità;

densità della somma. Speranza matematica: definizione per v.a. discrete o a.c. L'esistenza ed il calcolo della speranza matematica di $f(X)$ quando X è una v.a. discreta oppure a.c.

[cfr. Appunti, Par. 2.3.1, 2.3.2, 2.3.3]

24/10/2017 - Lezioni 9, 10
La media di una v.a. discreta come somma su Ω (e non sullo spazio di arrivo). Richiami: le proprietà della speranza matematica (linearità, positività etc.); la media del prodotto di v.a. indipendenti che hanno media; momento k-esimo, in particolare: se esiste il momento k-esimo allora esiste il momento p-esimo per ogni $p \leq k$; la varianza e il suo significato; le disuguaglianze di Markov, di Chebycev, di Schwarz.
Introduzione alla speranza matematica condizionale: il caso di v.a. discrete ed il caso di σ-algebra generata da una partizione al più numerabile di Ω.

[cfr. Appunti, Par. 2.3.2, 2.3.3, 3.1.1]

27/10/2017 - Lezioni 11, 12
Definizione formale di $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})$. Caso particolare: quando $\mathcal{G} = \sigma(Y)$, quindi $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) = \mathbb{E}(X \mid Y) = \Psi_X(Y)$, con Ψ_X funzione boreliana. Il formalismo "$\mathbb{E}(X \mid Y = y)$". Calcolo esplicito della funzione Ψ_X quando X e Y hanno densità congiunta discreta oppure hanno densità congiunta continua.
Le proprietà della media condizionale: se $X = c$ q.c. allora $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) = c$ q.c.; $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})) = \mathbb{E}(X)$; linearità, positività e monotonia della media condizionale; la disuguaglianza di Jensen per la media e per la media condizionale; se X è $\mathcal{G}$-misurabile allora $\mathbb{E}(XY \mid \mathcal{G}) = X\mathbb{E}(Y \mid \mathcal{G})$; se $\mathcal{A} \subset \mathcal{G}$ sotto σ-algebre di $\mathcal{F}$ allora $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{A}) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X \mid \mathcal{A}) \mid \mathcal{G}) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) \mid \mathcal{A})$.

[cfr. Appunti, Par. 3.1.1, 3.1.2, 3.1.3]

31/10/2017 - Lezioni 13, 14
Le proprietà della media condizionale: se $X \perp\!\!\!\perp \mathcal{G}$ allora $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) = \mathbb{E}(X)$; se X è $\mathcal{G}$-misurabile e $Y \perp\!\!\!\perp \mathcal{G}$ allora $\mathbb{E}(f(X,Y) \mid \mathcal{G}) = \mathbb{E}(f(x,Y))|_{x=X}$; se X è di quadrato integrabile allora $\mathbb{E}(X - \mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})^2) \leq \mathbb{E}((X-Z)^2)$ per ogni v.a. Z di quadrato integrabile e $\mathcal{G}$-misurabile.
Processi a tempo discreto. Filtrazioni, processi adattati. Definizione di martingala (mg), supermartingala (supermg) e submartingala (submg). Esempi. Proprietà.

[cfr. Appunti, Par. 3.1.4, 3.2.1, 3.2.2]

03/11/2017 - Lezioni 15, 16
Proprietà delle martingale, submartingale e supermartingale. Esempi. La decomposizione di Doob ed il compensatore. Esempio: data una $\mathcal{F}_n$-martingala $(X_n)_n$ di quadrato integrabile, calcolo del compensatore di $(X_n^2)_n$. Le martingale trasformate. Tempi d'arresto e σ-algebra degli eventi antecendenti: definizione e definizioni equivalenti.

[cfr. Appunti, Par. 3.2.2, 3.2.3, 3.2.4, 3.3]

07/11/2017 - Lezioni 17, 18
Proprietà dei tempi d'arresto, ad esempio: il tempo di ingresso/di uscita di un processo adattato è un tempo d'arresto; se τ_1 e τ_2 sono $\mathcal{F}_n$-t.a. allora $\tau_1 \wedge \tau_2$ è un $\mathcal{F}_n$-t.a.; se τ_1 e τ_2 sono $\mathcal{F}_n$-t.a. tali che $\tau_1 \leq \tau_2$ allora $\mathcal{F}_{\tau_1} \subset \mathcal{F}_{\tau_2}$; se τ_1 e τ_2 sono $\mathcal{F}_n$-t.a. allora $\mathcal{F}_{\tau_1 \wedge \tau_2} = \mathcal{F}_{\tau_1} \cap \mathcal{F}_{\tau_2}$; se $(X_n)_n$ è un processo $\mathcal{F}_n$-adattato e τ è un $\mathcal{F}_n$-t.a. finito allora X_τ è una v.a. $\mathcal{F}_\tau$-misurabile; se X è una v.a. integrabile e τ è un $\mathcal{F}_n$-t.a. allora $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}_\tau) = X_\tau$, dove $X_n = \mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}_n)$, $n \geq 0$. Il processo arrestato $X_n^\tau = X_{\tau \wedge n}$: se $(X_n)_n$ è una $\mathcal{F}_n$-mg (risp. submg, supermg) e τ è un $\mathcal{F}_n$-t.a. allora $(X_n^\tau)_n$ rimane una $\mathcal{F}_n$-mg (risp. submg, supermg). Il compensatore di una submg o supermg arrestata è il compensatore arrestato. Il teorema d'arresto.
Tassi di interesse: interesse composto, semplice, istantaneo.

[cfr. Appunti, Par. 3.3, 3.3.1; 1.1]

10/11/2017 - Lezioni 19, 20
Esercizi sui tassi. Alcuni aspetti dei mercati finanziari: la vendita allo scoperto; l'arbitraggio; le ipotesi di mercato. Generalità sui prodotti derivati. Contratti forward: valutazione di "non arbitraggio" del prezzo forward (prezzo di consegna). Le opzioni di acquisto (call) e di vendita (put). Le opzioni come strumenti finanziari per la gestione dei rischi. Il payoff dell'opzione call/put. Il problema del prezzo e della copertura dell'opzione.

[cfr. Appunti, Par. 1.1, 1.2, 1.3.1, 1.3.2]

14/11/2017 - Lezioni 21, 22
Non limitatezza della funzione payoff della call ed un esempio dei rischi derivanti dalla gestione di un portafoglio di sole opzioni call. Il modello discreto per la descrizione dei mercati finanziari: la filtrazione, il processo $d+1$-dimensionale dei prezzi, il fattore di sconto ed il processo dei prezzi scontati. Strategie di gestione e portafoglio associato. Strategie autofinanzianti e caratterizzazione in termini di scrittura del portafoglio e del portafoglio scontato. Dati un processo predicibile $(\phi_n^1, \dots, \phi_n^d)_n$ a valori in $\mathbb{R}^d$ e $V_0 \in \mathbb{R}$ esiste un unico processo predicibile $(\phi_n^0)_n$ tale che $(\phi_n^0, \phi_n^1, \dots, \phi_n^d)_n$ sia una strategia aufofinanziante. Strategie ammissibili e strategie di arbitraggio.

[cfr. Appunti, Par. 1.3.3, 4.1, 4.2, 4.3, 4.4]

17/11/2017 - Lezioni 23, 24
Il primo teorema fondamentale dell'asset pricing.

[cfr. Appunti, Par. 4.4]

21/11/2017 - Lezioni 25, 26
Conseguenze dell'esistenza della misura di martingala equivalente, ad esempio la formula di parità call-put. Mancanza di abitraggio nel modello binomale e del modello trinomiale ad un periodo: studio dell'esistenza della misura di martingala equivalente ed eventuale unicità. Definizione formale di un'opzione europea. Esempi: opzioni call, put, digital, asiatiche, con barriere. Opzioni replicabili e prezzo "di non arbitraggio". Completezza del mercato.

[cfr. Appunti, Par. 4.4, 4.5]

28/11/2017 - Lezioni 27, 28
Il secondo teorema fondamentale dell'asset pricing. Esempio: in mancanza di arbitraggio, il modello binomiale ad un periodo è completo ma il modello trinomiale ad un periodo non lo è. La formula di parità call-put con l'uso esplicito del prezzo (portafoglio replicante). Il modello di Cox, Ross e Rubinstein: definizione, proprietà.

[cfr. Appunti, Par. 4.5, 4.6.1]

30/11/2017 - Lezioni 29, 30
Equivalenza tra mancanza di arbitraggio e la condizione $a < r < b$. Completezza del mercato. Formula esplicita del prezzo di un'opzione di payoff $h = F(S_N)$. Calcolo della strategia replicante per opzioni di payoff $h = F(S_N)$. Formula *backward* del prezzo. Uso pratico del modello CRR: suddivisione del'intervallo $[0,T]$ in N sottointervalli, scelta del tasso ($r_N = RT/N$) e dei salti ($1+a_N = (1+r_N)e^{-\sigma\sqrt{T/N}}$ e $1+b_N = (1+r_N)e^{\sigma\sqrt{T/N}}$) in modo da costruire un mercato completo. La volatilità $\sigma > 0$.

[cfr. Appunti, Par. 4.6.1, 4.6.2]

01/12/2017 - Lezioni 31, 32
Convergenza in legge, per $N \to \infty$, di $\log \widetilde{S}_N^N / S_0$ ad una normale di media $-\sigma^2 T/2$ e varianza $\sigma^2 T$. Le formule di Black e Scholes per il prezzo della call e della put come limite, per $N \to \infty$, del valore della call e della put nel modello CRR. Prezzo Black e Scholes di call/put come funzione crescente del parametro volatilità - interpretazione finanziaria. La “volatilità implicita”. Esercizio al calcolatore: studio empirico (in scala logaritmica) della convergenza.

[cfr. Appunti, Par. 4.6.3, 4.6.4, 4.7]

05/12/2017 - Lezioni 33, 34
Opzioni americane nel modello generale, in ipotesi di completezza del mercato. Il processo-payoff. La formulazione “all'indietro” del prezzo dell'opzione americana. Payoff e prezzo scontati: formulazione “all'indietro” del prezzo scontato dell'opzione americana in termini del processo di payoff scontato.
Il prezzo scontato dell'opzione americana come l'inviluppo di Snell del processo di payoff scontato. Il tempo $\nu_0 = \inf\{n \geq 0 : \widetilde{U}_n = \widetilde{Z}_n\}$: proprietà di martingala per $(\widetilde{U}_n^{\nu_0})_{0 \leq n \leq N}$. Dimostrazione della proprietà $U_0 = \sup_{\nu \in \mathcal{T}_{0,N}} \mathbb{E}^*(\widetilde{Z}_\nu)$ e ottimalità di ν_0 ($U_0 = \mathbb{E}^*(\widetilde{Z}_{\nu_0})$). Definizione formale di “istante di esercizio ottimale” e caratterizzazione matematica.

[cfr. Appunti, Par. 5.1, 5.2]

06/12/2017 - Lezioni 35, 36
Richiami sulla decomposizione di Doob: il compensatore di una supermartingala arrestata come il compensatore arrestato; caso particolare: il processo arrestato di una supermartingala è una martingala se e solo se il compensatore arrestato è identicamente nullo. Uso della decomposizione di Doob $\widetilde{U}_n = \widetilde{M}_n - \widetilde{A}_n$, $n \leq N$, per determinare una strategia ammissibile ϕ tale che $V_\tau(\phi) = Z_\tau$ per ogni tempo ottimale di esercizio τ (copertura esatta delle opzioni americane). Il tempo di esercizio ottimale $\nu_* = \inf\{n \geq 0 : \widetilde{A}_{n+1} > 0\}$. Caratterizzazione degli istanti di esercizio ottimale come i tempi d'arresto compresi tra ν_0 e ν_* in cui prezzo e payoff coincidono. Riscrittura di tutte le proprietà su un generico orizzonte temporale $[n, N]$, $n = 0, 1, \dots, N$. Opzione europea associata e verifica del fatto che il prezzo dell'opzione americana è sempre maggiore od uguale al prezzo dell'europea associata. Caso dell'opzione call: uguaglianza tra prezzo americano ed europeo.

[cfr. Appunti, Par. 5.3]

12/12/2017 - Lezioni 37, 38
La formula della funzione prezzo della put americana nel modello CRR: versione backward (dal principio di programmazione dinamica) e formulazione variazionale. Le proprietà (continuità, monotonia e convessità) e discussione qualitativa. Esercizio al calcolatore: implementazione del principio di programmazione dinamica e disegno della funzione $x \mapsto P_{am}(0, x)$.

[cfr. Appunti, Par. 5.4]

15/12/2017 - Lezioni 39, 40
Breve discussione sulla generazione al calcolatore di numeri a caso nell'intervallo $(0, 1)$. L'algoritmo KNUTH. Metodi Monte Carlo: generalità. L'intervallo di fiducia come output standard. Applicazione: calcolo del prezzo di opzioni. Simulazione del modello CRR. Stima del prezzo di call/put standard con il metodo Monte Carlo e studio empirico della velocità di convergenza al valore esatto quando il numero di simulazioni tende a $+\infty$.

[cfr. Appunti, Par. 6.1, 6.2, 6.3.1]

19/12/2017 - Lezioni 41, 42
Opzioni asiatiche: prezzo di call/put asiatiche con la tecnica Monte Carlo. Confronto con il prezzo della call/put standard. Formule di parità per il prezzo dell'opzione call/put asiatica ed uso per la

validazione del programma. Opzioni con barriere ((up,down)&(in,out), double&(in,out)): calcolo del prezzo con metodi Monte Carlo. Formule di parità per la validazione del programma. Copertura dinamica per opzioni europee.

[cfr. Appunti, Par. 6.3.2, 6.3.3, 6.4]

22/12/2017 - Lezioni 43, 44
Put americana: simulazione del tempo ottimale di esercizio ν_0. Calcolo del prezzo americano con Monte Carlo a partire dalla formula del prezzo come esapettazione del payoff scontato al tempo ν_0. Analisi statistiche di ν_0: calcolo della media, della varianza e della distribuzione con tecniche Monte Carlo. Copertura dinamica della put americana: il portafoglio che replica esattamente il payoff americano nell'istante di esercizio ν_0.

[cfr. Appunti, Par. 6.5]

09/01/2017 - Lezioni 45, 46
Discussioni ed approfondimenti sugli algoritmi numerici.