

Diario delle lezioni di
Metodi e Modelli dei Mercati Finanziari
a.a. 2017/2018
www.mat.uniroma2.it/~caramell/did_1718/mmmf.htm

PARTE I: **OPZIONI EUROPEE E METODI MONTE CARLO**

Lezioni 1, 2, 3 - 09/10/2017

Breve introduzione al corso. Richiami di calcolo stocastico: integrale di Ito, processi di Ito, formula di Ito. Cambi di misure. Introduzione al teorema di Girsanov.

[cfr. Baldi, appunti, Cap. 10; Lamberton e Lapeyre, Cap. 3]

Lezioni 4, 5, 6 - 13/10/2016

Risultati generali sulla “martingala esponenziale (complessa)”. Il teorema di Girsanov. I teoremi di rappresentazione delle martingale browniane.

[cfr. Baldi, appunti, Cap. 10; Lamberton e Lapeyre, Cap. 3]

Lezioni 7, 8, 9 - 16/10/2017

Caratterizzazione delle misure equivalenti su (Ω, \mathcal{F}_T) , dove $\mathcal{F}_T = \sigma(B_s, s \leq T) \vee \mathcal{N}$ ($B =$ browniano, $\mathcal{N} =$ insiemi di misura nulla). Una condizione sufficiente perché una martingala locale browniana sia una martingala. Ancora richiami di calcolo stocastico: equazioni differenziali stocastiche (teorema classico di esistenza ed unicità, stime in L^p e markovianità della soluzione). Il modello di Black e Scholes: introduzione.

[cfr. Baldi, appunti, Cap. 10; Lamberton e Lapeyre, Cap. 4]

Lezioni 10, 11, 12 - 20/10/2017

I due problemi (prezzo/copertura) legati alle opzioni. Strategie autofinanzianti: caratterizzazione in termini della dinamica del portafoglio scontato. La misura “equivalente di martingala” o “di rischio neutro”. Strategie ammissibili e replicanti. Il teorema di replicabilità delle opzioni europee di quadrato integrabile sotto la misura di rischio neutro. Il prezzo delle opzioni europee. Opzioni il cui payoff dipende dal sottostante a maturità: la funzione-prezzo, l’equazione alle derivate parziali ad essa associata e la copertura come il gradiente della funzione prezzo.

[cfr. Lamberton e Lapeyre, Cap. 4]

Lezioni 13, 14, 15 - 23/10/2017

Le Greche di un’opzione. La formula di Black e Scholes per la funzione-prezzo della call. La formula di parità per opzioni call/put e la formula per la funzione-prezzo della put. Il modello di Black e Scholes con coefficienti dipendenti dal tempo.

[cfr. Lamberton e Lapeyre, Cap. 4 e Problema 1 al Cap. 4]

Lezioni 16, 17 - 27/10/2017

Il modello di Garman-Kohlhagen per opzioni su valuta estera.

[cfr. Lamberton e Lapeyre, Cap. 4, Problema 2]

Lezioni 18, 19, 20 - 30/10/2017

Opzioni di scambio su due sottostanti nel modello di Black e Scholes. Opzione composta call su call (parte I).

[cfr. Lamberton e Lapeyre, Cap. 4, Problemi 3 e 5]

Lezioni 21, 22, 23 - 03/11/2017

Opzione composta call su call. Opzione call asiatica.

[cfr. Lamberton e Lapeyre, Cap. 4, Problemi 5 e 7]

Lezioni 24, 25, 26 - 06/11/2017

Modelli generali (di Ito) per la finanza: il “rumore” descritto tramite un browniano in \mathbb{R}^d , il prezzo del titolo non rischioso con un tasso di interesse istantaneo aleatorio, i prezzi degli m titoli rischiosi nel mercato descritti tramite processi di Ito. Definizione di opzione europea. Le strategie autofinanzianti e la loro caratterizzazione usando il portafoglio scontato. Le strategie ammissibili e di arbitraggio. Definizione di mercato privo di arbitraggio. La misura equivalente di martingala \mathbb{P}^* : esistenza. Il moto browniano sotto \mathbb{P}^* . Le proprietà di martingala del portafoglio scontato associato a strategie autofinanzianti e ammissibili. Strategie replicanti e prezzo di “non arbitraggio” per un’opzione replicabile in presenza di una misura equivalente di martingala. Indipendenza del prezzo dalla misura equivalente di martingala. Definizione di mercato completo ed unicità della misura di martingala equivalente in un mercato completo. Il modello di diffusione per la descrizione dei mercati finanziari: definizione, richieste sui coefficienti del modello.

[cfr. Appunti, paragrafi 11.1, 11.2, 11.3, 11.4, 11.5]

Lezioni 27, 28, 29 - 10/11/2017

Condizione necessaria e sufficiente per l’esistenza della misura equivalente di martingala. La condizione sufficiente classica sulla volatilità che garantisce l’esistenza della misura equivalente di martingala (dimensione browniano \geq numero di sottostanti e $\sigma\sigma^*$ uniformemente ellittica). Teorema classico di completezza del mercato. Breve discussione sui mercati non completi. Equazione alle derivate parziali associata al prezzo di un’opzione europea quando esiste la funzione-prezzo ed è noto essere regolare; la strategia di copertura come il gradiente della funzione-prezzo.

[cfr. Appunti, paragrafi 11.5, 11.6]

Lezioni 30, 31, 32 - 13/11/2017

La regolarità della funzione-prezzo di un’opzione europea di payoff dipendente dal prezzo dei titoli a maturità: legame con EDP paraboliche. Operatori differenziali lineari del secondo ordine uniformemente ellittici e diffusione sottostante. La regolarità della funzione-prezzo come conseguenza del teorema di esistenza ed unicità (forte) di una EDP parabolica con termine del

secondo ordine uniformemente ellittico (cambio di variabile). EDP paraboliche in un dominio limitato (problema di Cauchy-Dirichlet): formula di rappresentazione per la soluzione.

[cfr. Appunti, paragrafi 11.6, 9.1, 9.3]

Lezioni 33, 34, 35 - 17/11/2017

La formula di Feynman-Kac per la rappresentazione delle soluzioni EDP paraboliche con problema di Cauchy su \mathbb{R}^m . Uso della formula di Feynman-Kac per determinare le condizioni sui coefficienti del modello e sulla funzione payoff affinché la funzione-prezzo sia una soluzione regolare dell'EDP parabolica associata. In particolare, calcolo della copertura tramite la formula di Ito. Cenni sulle opzioni con barriere: la funzione-prezzo come soluzione di una EDP grazie alla formula di rappresentazione. Cenni sulla soluzione fondamentale di un problema parabolico e legame con la densità di transizione: stime gaussiane ed equazione backward.

[cfr. Appunti, paragrafi 9.4, 9.5, 11.6]

Lezioni 36, 37, 38 - 20/11/2017

Metodi Monte Carlo: generalità. L'IC di output. Simulazione di v.a. gaussiane tramite il generatore di Box-Muller. Simulazione del moto browniano e del moto browniano geometrico. Calcolo numerico con tecniche Monte Carlo nel modello di Black e Scholes del prezzo di opzioni call/put standard. Confronto con le formule esatte e studio empirico della velocità di convergenza. Calcolo numerico con tecniche Monte Carlo nel modello di Black e Scholes del prezzo di opzioni asiatiche call/put standard. Uso delle formule di parità per la validazione del programma.

[cfr. Appunti su metodi Monte Carlo]

Lezioni 39, 40 - 24/11/2017

Opzioni con barriera: valutazione numerica del prezzo con Monte Carlo tramite (a) approssimazione del sup su $[0, T]$ con il max osservato ai tempi $t_1 < t_2 < \dots < t_N$ (stimatore Monte Carlo distorto) e (b) con una formula di rappresentazione che coinvolge solo il valore del sottostante a T (stimatore Monte Carlo non distorto). Formule di “parità” per la validazione dei programmi.

[cfr. Appunti su metodi Monte Carlo]

Lezioni 41, 42, 43 - 27/11/2017

Breve discussione sul calcolo del prezzo quando il processo sottostante è una diffusione qualsiasi (metodo di Eulero). Opzioni su due sottostanti (call e digital) e relative formule di “parità” nel modello di Black-Scholes. Calcolo numerico via Monte Carlo della copertura: il metodo delle differenze finite (uso delle differenze centrate) e il metodo basato sulla rappresentazione della delta sotto forma di aspettazione.

[cfr. Appunti su metodi Monte Carlo]

Lezioni 44, 45 - 01/12/2017

Copertura dinamica. Panoramica sull'argomento di approfondimento “tassi di interesse”: il mercato degli “zero-coupon bonds”; il rumore di mercato modellizzato con un rumore browniano; i problemi matematici associati: la misura di rischio neutro, la dinamica dei prezzi dei bonds, le opzioni su bonds; alcuni modelli per il tasso di interesse: Vasicek, CIR e HJM.

[cfr. Appunti su metodi Monte Carlo; Lamberton e Lapeyre, Cap. 6]

Lezioni 46, 47, 48 - 04/12/2017

Panoramica sull'argomento di approfondimento "calcolo di Malliavin ed applicazioni in finanza": lo spazio S dei funzionali semplici e lo spazio P dei processi semplici; la derivata di Malliavin come operatore $D : S \rightarrow P$ e l'integrale di Skorohod come operatore $\delta : P \rightarrow S$; le tre proprietà fondamentali: dualità, chain rule e integrale di Skorohod "per un prodotto speciale"; gli spazi $Dom_p(D) = \mathbb{D}^{1,p}$, $Dom_p(\delta)$, $p \geq 2$, e $Dom_\infty(D) = \mathbb{D}^{1,\infty}$, $Dom_\infty(\delta)$; la derivata di Malliavin D , l'integrale di Skorohod δ e le tre proprietà fondamentali; la formula di integrazione per parti alla Malliavin ed uso per il calcolo delle greche; la formula di Clark-Ocone ed uso per la rappresentazione della copertura delle opzioni.

[cfr. Appunti su calcolo di Malliavin ed applicazioni in finanza, Cap. 2 (tutto eccetto appendice 2.6) e Cap 3 (eccetto par. 3.3)]

Lezioni 49, 50 - 15/12/2017

Panoramica sull'argomento di approfondimento "opzioni americane": l'"*ess sup*" di una famiglia di v.a.; processi "regolari" e "di classe D"; l'inviluppo di Snell ed il problema dell'arresto ottimo; la decomposizione di Doob; istanti ottimali d'arresto. Prezzo e copertura delle opzioni americane: strategie ammissibili, opzioni americane e inviluppo di Snell, funzione-prezzo. Il caso delle equazioni differenziali stocastiche. Prezzo di opzioni call e put nel modello Black e Scholes; proprietà analitiche della funzione-prezzo. La disuguaglianza variazionale.

[cfr. Appunti di D. Lamberton, Cap. 1 (solo le definizioni e proprietà principali), Cap. 2, 3, 4 (eccetto Par. 4.4)]

Seminario - 18/12/2017

Seminario di Maya Briani (IAC-CNR, Roma) su trattamento numerico di EDP e applicazioni in finanza.

PARTE II: **APPROFONDIMENTI**

Le ulteriori ore a disposizione del corso seguono un corso di letture su un argomento a scelta tra:

- **MODELLI DI DIFFUSIONE PER I TASSI D'INTERESSE** [cfr. Lamberton e Lapeyre, Cap. 6 ed esercizi del Cap. 6]
- **INTRODUZIONE AL CALCOLO DI MALLIAVIN E APPLICAZIONI IN FINANZA** [cfr. Appunti]
- **OPZIONI AMERICANE** [cfr. Appunti di D. Lamberton, link al sito del corso]

Gli appunti si possono richiedere inviando un messaggio a caramell@mat.uniroma2.it