

Diario delle lezioni di
Probabilità e Finanza

a.a. 2016/2017

www.mat.uniroma2.it/~caramell/did_1617/pf.htm

26/09/2016 - Lezioni 1, 2

Introduzione al corso. Tassi di interesse: interesse composto, semplice, istantaneo. Esempi. Alcuni aspetti dei mercati finanziari: la vendita allo scoperto; l'arbitraggio; le ipotesi di mercato. Generalità sui prodotti derivati. I contratti forward.

[cfr. Appunti, Par. 1.1, 1.2, 1.3.1]

29/09/2016 - Lezioni 3, 4

Contratti forward: valutazione di “non arbitraggio” del prezzo forward. Le opzioni di acquisto (call) e di vendita (put). Le opzioni come strumenti finanziari per la gestione dei rischi. Il payoff dell'opzione call/put. Il problema del prezzo e della copertura dell'opzione. Non limitatezza della funzione payoff della call ed un esempio dei rischi derivanti dalla gestione di un portafoglio di sole opzioni call.

Richiami di probabilità: le algebre e le σ -algebre. Esercizi.

[cfr. Appunti, Par. 1.3.2, 1.3.3, 2.1.1]

03/10/2016 - Lezioni 5, 6

La σ -algebra generata da una classe di sottoinsiemi. Esempi: $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$ quando $\mathcal{C}$ è una σ -algebra; $\sigma(\mathcal{C}_1) \subset \sigma(\mathcal{C}_2)$ quando $\mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}_2$. La σ -algebra generata da una partizione al più numerabile. La σ -algebra di Borel. Le classi generatrici di $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ (intervalli aperti, semichiusi, chiusi, etc.). La classe $\pi(\mathbb{R}) = \{(-\infty, c] : c \in \mathbb{R}\}$ come classe che genera $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Spazi misurabili e funzioni misurabili. La σ -algebra generata da una funzione misurabile e la sua caratterizzazione in termini di controimmagini.

[cfr. Appunti, Par. 2.1.1, 2.1.2]

06/10/2016 - Lezioni 7, 8

Condizioni sufficienti per la verifica della misurabilità. Caso particolare per funzioni a valori reali. Funzioni discrete: definizione, misurabilità, la σ -algebra generata come una σ -algebra generata da una partizione numerabile. Proprietà delle funzioni misurabili: la classe delle funzioni misurabili come un'algebra; misurabilità della funzione composta di funzioni misurabili; misurabilità dell'inf, del sup etc. di una successione di funzioni misurabili; $\sigma(f) = \sigma(g)$ quando $f = h_1 \circ g$ e $g = h_1 \circ f$, con f, g, h_1, h_2 misurabili; data una partizione $\mathcal{C}$ al più numerabile, se f è $\sigma(\mathcal{C})$ -misurabile allora f è costante su tutti gli elementi della partizione. Date due funzioni $\mathcal{S}$ -misurabili f e g , se g è $\sigma(f)$ -misurabile allora $g = h \circ f$, per un'opportuna funzione misurabile h .

[cfr. Appunti, Par. 2.1.2]

10/10/2016 - Lezioni 9, 10

Definizione di uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Esempio: se $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{C})$ con $\mathcal{C}$ partizione al più numerabile di Ω allora $\mathbb{P}$ è perfettamente individuata dai valori $\mathbb{P}(C)$, al variare di $C \in \mathcal{C}$. Le

proprietà generali della probabilità $\mathbb{P}$ e la proprietà di monotonia. Indipendenza tra eventi, legame con la proprietà di fattorizzazione delle σ -algebre generate da questi eventi. La definizione di σ -algebre indipendenti. Esempio: quando le σ -algebre sono generate da partizioni al più numerabili basta che la proprietà di fattorizzazione valga per elementi scelti nelle partizioni. Definizione formale di v.a. Caso particolare: v.a. discrete, finite, a valori in $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$. La definizione di v.a. indipendenti in termini delle σ -algebre generate. Definizione di indipendenza tra v.a. e σ -algebre. Le proprietà delle v.a. Definizione di legge di una v.a.

[cfr. Appunti, Par. 2.2, 2.3.1, 2.3.2]

13/10/2016 - Lezioni 11, 12

V.a. discrete: densità discreta; densità discreta congiunta e calcolo delle marginali; caratterizzazione dell'indipendenza in termini di densità; densità della somma; densità discreta condizionale. V.a. assolutamente continue (a.c.): densità continua; densità congiunta e calcolo delle marginali; caratterizzazione dell'indipendenza in termini di densità; densità della somma. Speranza matematica: definizione per v.a. discrete o a.c. La media di una v.a. discreta come somma su Ω (e non sullo spazio di arrivo).

[cfr. Appunti, Par. 2.3.2, 2.3.3]

17/10/2016 - Lezioni 13, 14

Le proprietà della speranza matematica (linearità, positività etc.). L'esistenza ed il calcolo della speranza matematica di $f(X)$ quando X è una v.a. discreta oppure a.c. La media del prodotto di v.a. indipendenti che hanno media. Caratterizzazione dell'indipendenza in termini di fattorizzazione della speranza matematica ($X \perp\!\!\!\perp Y$ sse $\mathbb{E}(f(X)g(Y)) = \mathbb{E}(f(X))\mathbb{E}(g(Y))$ per ogni f, g boreliane tali che $f(X)$ e $g(Y)$ abbiano media). Momento k -esimo e momento k -esimo centrato. Spazi $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $p \geq 1$, e l'inclusione $L^p \subset L^q$ quando $p \geq q \geq 1$. Lo spazio L^2 e la varianza. Le disuguaglianze di Markov, di Chebycev, di Schwarz. Richiami sulla covarianza e varianza della somma di v.a. Speranza matematica di un vettore aleatorio.

Speranza matematica condizionale: il caso di v.a. discrete.

[cfr. Appunti, Par. 2.3.3, 3.1]

20/10/2016 - Lezioni 15, 16

Speranza matematica condizionale: il caso di σ -algebra generata da una partizione al più numerabile di Ω . Definizione formale di $\mathbb{E}(X | \mathcal{G})$. Caso particolare: quando $\mathcal{G} = \sigma(Y)$, quindi $\mathbb{E}(X | \mathcal{G}) = \mathbb{E}(X | Y) = \Psi_X(Y)$, con Ψ_X funzione boreliana. Il formalismo " $\mathbb{E}(X | Y = y)$ ". Calcolo esplicito della funzione Ψ_X quando X e Y hanno densità congiunta discreta oppure hanno densità congiunta continua, in quest'ultimo caso definizione di "densità continua condizionale".

Le proprietà della media condizionale: se $X = c$ q.c. allora $\mathbb{E}(X | \mathcal{G}) = c$ q.c.; $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X | \mathcal{G})) = \mathbb{E}(X)$; linearità, positività e monotonia della media condizionale; la disuguaglianza di Jensen per la media e per la media condizionale.

[cfr. Appunti, Par. 3.1.1, 3.1.2, 3.1.3]

24/10/2016 - Lezioni 17, 18

Le proprietà della media condizionale: se X è $\mathcal{G}$ -misurabile allora $\mathbb{E}(XY | \mathcal{G}) = X\mathbb{E}(Y | \mathcal{G})$; se $\mathcal{A} \subset \mathcal{G}$ sotto σ -algebre di $\mathcal{F}$ allora $\mathbb{E}(X | \mathcal{A}) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X | \mathcal{A}) | \mathcal{G}) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X | \mathcal{G}) | \mathcal{A})$; se $X \perp\!\!\!\perp \mathcal{G}$ allora $\mathbb{E}(X | \mathcal{G}) = \mathbb{E}(X)$; se X è $\mathcal{G}$ -misurabile e $Y \perp\!\!\!\perp \mathcal{G}$ allora $\mathbb{E}(f(X, Y) | \mathcal{G}) = \mathbb{E}(f(x, Y))|_{x=X}$; se X è di quadrato integrabile allora $\mathbb{E}(X - \mathbb{E}(X | \mathcal{G}))^2 \leq \mathbb{E}((X - Z)^2)$ per ogni v.a. Z di quadrato integrabile e $\mathcal{G}$ -misurabile.

Filtrazioni, processi adattati. Definizione di martingala (mg), supermartingala (supermg) e submartingala (submg). Primi esempi. Se $(X_n)_n$ è una martingala (risp. supermg, submg) allora $\{\mathbb{E}(X_n)\}_n$ è una successione costante (risp. non crescente, non decrescente).

[cfr. Appunti, Par. 3.1.3, 3.2.1]

27/10/2016 - Lezioni 19, 20

Proprietà delle martingale, submartingale e supermartingale. Esempi. La decomposizione di Doob ed il compensatore. Esempio: data una $\mathcal{F}_n$ -martingala $(X_n)_n$ di quadrato integrabile, calcolo del compensatore di $(X_n^2)_n$. Le martingale trasformate.

[cfr. Appunti, Par. 3.2.2, 3.2.3, 3.2.4]

03/11/2016 - Lezioni 21, 22

Tempi d'arresto e σ -algebra degli eventi antecedenti: definizioni e definizioni equivalenti. Proprietà dei tempi d'arresto, ad esempio: il tempo di ingresso/di uscita di un processo adattato è un tempo d'arresto; se τ_1 e τ_2 sono $\mathcal{F}_n$ -t.a. allora $\tau_1 \wedge \tau_2$ è un $\mathcal{F}_n$ -t.a.; se τ_1 e τ_2 sono $\mathcal{F}_n$ -t.a. tali che $\tau_1 \leq \tau_2$ allora $\mathcal{F}_{\tau_1} \subset \mathcal{F}_{\tau_2}$; se τ_1 e τ_2 sono $\mathcal{F}_n$ -t.a. allora $\mathcal{F}_{\tau_1 \wedge \tau_2} = \mathcal{F}_{\tau_1} \cap \mathcal{F}_{\tau_2}$; se $(X_n)_n$ è un processo $\mathcal{F}_n$ -adattato e τ è un $\mathcal{F}_n$ -t.a. finito allora X_τ è una v.a. $\mathcal{F}_\tau$ -misurabile; se X è una v.a. integrabile e τ è un $\mathcal{F}_n$ -t.a. allora $\mathbb{E}(X | \mathcal{F}_\tau) = X_\tau$, dove $X_n = \mathbb{E}(X | \mathcal{F}_n)$, $n \geq 0$. Il processo arrestato $X_n^\tau = X_{\tau \wedge n}$: se $(X_n)_n$ è una $\mathcal{F}_n$ -mg (risp. submg, supermg) e τ è un $\mathcal{F}_n$ -t.a. allora $(X_n^\tau)_n$ rimane una $\mathcal{F}_n$ -mg (risp. submg, supermg).

[cfr. Appunti, Par. 3.3]

07/11/2016 - Lezioni 23, 24

Il teorema d'arresto.

Il modello discreto per la descrizione dei mercati finanziari: la filtrazione, il processo $d+1$ -dimensionale dei prezzi, il fattore di sconto ed il processo dei prezzi scontati. Strategie di gestione e portafoglio associato. Strategie autofinanzianti e caratterizzazione in termini di scrittura del portafoglio e del portafoglio scontato. Dati un processo predicibile $(\phi_n^1, \dots, \phi_n^d)_n$ a valori in $\mathbb{R}^d$ e $V_0 \in \mathbb{R}$ esiste un unico processo predicibile $(\phi_n^0)_n$ tale che $(\phi_n^0, \phi_n^1, \dots, \phi_n^d)_n$ sia una strategia ammissibile.

[cfr. Appunti, Par. 3.3.1, 4.1, 4.2, 4.3]

10/11/2016 - Lezioni 25, 26

Il primo teorema fondamentale dell'asset pricing.

[cfr. Appunti, Par. 4.4]

14/11/2016 - Lezioni 27, 28

Conseguenze dell'esistenza della misura di martingala equivalente, ad esempio la formula di parità call-put. Mancanza di arbitraggio nel modello binomiale e del modello trinomiale ad un periodo: studio dell'esistenza della misura di martingala equivalente ed eventuale unicità. Definizione formale di un'opzione europea. Esempi: opzioni call, put, digital, asiatiche, con barriere.

[cfr. Appunti, Par. 4.4, 4.5]

17/11/2016 - Lezioni 29, 30

Opzioni replicabili e prezzo "di non arbitraggio". Completezza del mercato. Il secondo teorema fondamentale dell'asset pricing. Esempio: in mancanza di arbitraggio, il modello binomiale ad un periodo è completo ma il modello trinomiale ad un periodo non lo è. La formula di parità call-put con l'uso esplicito del prezzo (portafoglio replicante).

[cfr. Appunti, Par. 4.5]

21/11/2016 - Lezioni 31, 32

Il modello di Cox, Ross e Rubinstein: definizione, proprietà. Equivalenza tra mancanza di arbitraggio e la condizione $a < r < b$. Completezza del mercato. Formula esplicita del prezzo di un'opzione di payoff $h = F(S_N)$.

[cfr. Appunti, Par. 4.6.1, 4.6.2]

24/11/2016 - Lezioni 33, 34

Calcolo della strategia replicante per opzioni di payoff $h = F(S_N)$. Formula *backward* del prezzo. Uso pratico del modello CRR: suddivisione dell'intervallo $[0, T]$ in N sottointervalli, scelta del tasso ($r_N = RT/N$) e dei salti ($1 + a_N = (1 + r_N)e^{-\sigma\sqrt{T/N}}$ e $1 + b_N = (1 + r_N)e^{\sigma\sqrt{T/N}}$) in modo da costruire un mercato completo. La volatilità $\sigma > 0$. Convergenza in legge, per $N \rightarrow \infty$, di $\log \tilde{S}_N^N/S_0$ ad una normale di media $-\sigma^2 T/2$ e varianza $\sigma^2 T$.

[cfr. Appunti, Par. 4.6.2, 4.6.3]

28/11/2016 - Lezioni 35, 36

Le formule di Black e Scholes per il prezzo della call e della put come limite, per $N \rightarrow \infty$, del valore della call e della put nel modello CRR. Studio empirico (in scala logaritmica) della convergenza e metodo di estrapolazione di Romberg per determinare una successione che converge più velocemente. Prezzo Black e Scholes di call/put come funzione crescente del parametro volatilità - interpretazione finanziaria.

Opzioni americane nel modello generale, in ipotesi di completezza del mercato. Il processo-payoff. La formulazione “all’indietro” del prezzo dell’opzione americana. Payoff e prezzo scontati: formulazione “all’indietro” del prezzo scontato dell’opzione americana in termini del processo di payoff scontato.

[cfr. Appunti, Par. 4.6.3, 4.6.4, 4.7, 5.1]

30/11/2016 - Lezioni 37, 38

Il prezzo scontato dell’opzione americana come l’involuppo di Snell del processo di payoff scontato. Il tempo $\nu_0 = \inf\{n \geq 0 : \tilde{U}_n = \tilde{Z}_n\}$: proprietà di martingala per $(\tilde{U}_n^{\nu_0})_{0 \leq n \leq N}$. Dimostrazione della proprietà $U_0 = \sup_{\nu \in \mathcal{T}_{0,N}} \mathbb{E}^*(\tilde{Z}_\nu)$ e ottimalità di ν_0 ($U_0 = \mathbb{E}^*(\tilde{Z}_{\nu_0})$). Definizione formale di “istante di esercizio ottimale” e caratterizzazione matematica. Richiami sulla decomposizione di Doob: il compensatore di una supermartingala arrestata come il compensatore arrestato; caso particolare: il processo arrestato di una supermartingala è una martingala se e solo se il compensatore arrestato è identicamente nullo.

[cfr. Appunti, Par. 5.2]

05/12/2016 - Lezioni 39, 40

Uso della decomposizione di Doob $\tilde{U}_n = \tilde{M}_n + \tilde{A}_n$, $n \leq N$, per determinare una strategia ammissibile ϕ tale che $V_\tau(\phi) = Z_\tau$ per ogni tempo ottimale di esercizio τ (copertura esatta delle opzioni americane). Il tempo di esercizio ottimale $\nu_* = \inf\{n \geq 0 : \tilde{A}_{n+1} > 0\}$. Caratterizzazione dell’istante di esercizio ottimale come un tempo d’arresto compreso tra ν_0 e ν_* in cui prezzo e payoff coincidono. Riscrittura di tutte le proprietà su un generico orizzonte temporale $[n, N]$, $n = 0, 1, \dots, N$. Opzione europea associata e verifica del fatto che il prezzo dell’opzione americana è sempre maggiore od uguale al prezzo dell’europea associata. Caso dell’opzione call: uguaglianza tra prezzo americano ed europeo.

[cfr. Appunti, Par. 5.3]

12/12/2016 - Lezioni 41, 42

La formula della funzione prezzo della put americana nel modello CRR: versione backward (dal principio di programmazione dinamica) e formulazione variazionale. Le proprietà (continuità, monotonia e convessità) e discussione qualitativa. Esercizio al calcolatore: implementazione del principio di programmazione dinamica e disegno della funzione $x \mapsto P_{am}(0, x)$.

Breve discussione sulla generazione al calcolatore di numeri a caso nell’intervallo $(0, 1)$.

[cfr. Appunti, Par. 5.4]

15/12/2016 - Lezioni 43, 44

Metodi Monte Carlo: generalità. L'intervallo di fiducia come output standard. Applicazione: calcolo del prezzo di opzioni nel modello CRR. Simulazione del modello CRR. Stima del prezzo di call/put standard con il metodo Monte Carlo e studio empirico della velocità di convergenza al valore esatto quando il numero di simulazioni tende a $+\infty$. Opzioni asiatiche: prezzo di call/put asiatiche con la tecnica Monte Carlo. Confronto con il prezzo della call/put standard. Formule di parità per il prezzo dell'opzione call/put asiatica ed uso per la validazione del programma.

[cfr. Appunti, Par. 6.1, 6.2, 6.3.1, 6.3.2]

19/12/2016 - Lezioni 45, 46

Opzioni con barriere ((up,down)&(in,out), double&(in,out)): calcolo del prezzo con metodi Monte Carlo. Formule di parità per la validazione del programma. Approfondimenti sull'implementazione del principio di programmazione dinamica, in particolare sull'uso di matrici e/o puntatori.

[cfr. Appunti, Par. 6.3.3]

22/12/2016 - Lezioni 47, 48

Copertura dinamica per opzioni europee. Put americana: simulazione del tempo ottimale di esercizio ν_0 e analisi statistiche. Copertura dinamica della put americana: il portafoglio che replica esattamente il payoff americano nell'istante di esercizio ν_0 .

[cfr. Appunti, Par. 6.4, 6.5]