

Diario delle lezioni di  
**Metodi e Modelli dei Mercati Finanziari**  
a.a. 2016/2017

PARTE I: **OPZIONI EUROPEE E METODI MONTE CARLO**

**Lezioni 1, 2, 3 - 29/09/2016**

Breve introduzione al corso. Richiami di calcolo stocastico: integrale di Ito, processi di Ito, formula di Ito.

[cfr. Baldi, appunti, Cap. 12; Lamberton e Lapeyre, Cap. 3]

**Lezioni 4, 5, 6 - 03/10/2016**

Risultati generali sulla “martingala esponenziale (complessa)”. Il teorema di Girsanov. I teoremi di rappresentazione delle martingale browniane.

[cfr. Baldi, appunti, Cap. 12; Lamberton e Lapeyre, Cap. 3]

**Lezioni 7, 8, 9 - 06/10/2016**

Caratterizzazione delle misure equivalenti su  $(\Omega, \mathcal{F}_T)$ , dove  $\mathcal{F}_T = \sigma(B_s, s \leq T) \vee \mathcal{N}$  ( $B$  = browniano,  $\mathcal{N}$  = insiemi di misura nulla). Una condizione sufficiente perché una martingala locale browniana sia una martingala. Ancora richiami di calcolo stocastico: equazioni differenziali stocastiche (teorema classico di esistenza ed unicità, stime in  $L^p$  e markovianità della soluzione). Il modello di Black e Scholes: introduzione. I due problemi (prezzo/copertura) legati alle opzioni. Strategie autofinanzianti: caratterizzazione in termini della dinamica del portafoglio scontato.

[cfr. Baldi, appunti, Cap. 12; Lamberton e Lapeyre, Cap. 4]

**Lezioni 10, 11, 12 - 10/10/2016**

La misura “equivalente di martingala” o “di rischio neutro”. Strategie ammissibili e replicanti. Il teorema di replicabilità delle opzioni europee di quadrato integrabile sotto la misura di rischio neutro. Il prezzo delle opzioni europee. Opzioni il cui payoff dipende dal sottostante a maturità: la funzione-prezzo e l’equazione alle derivate parziali ad essa associata. Le Greche di un’opzione. La formula di Black e Scholes per la funzione-prezzo della call. La formula di parità per opzioni call/put e la formula per la funzione-prezzo della put.

[cfr. Lamberton e Lapeyre, Cap. 4]

**Lezioni 13, 14 - 13/10/2016**

Il modello di Black e Scholes con coefficienti dipendenti dal tempo.

[cfr. Lamberton e Lapeyre, Cap. 4, Problema 1]

### **Lezioni 15, 16, 17 - 17/10/2016**

Il modello di Garman-Kohlhagen per opzioni su valuta estera. Opzioni di scambio (su due sottostanti) nel modello di Black e Scholes.

[cfr. Lamberton e Lapeyre, Cap. 4, Problemi 2 e 3]

### **Lezioni 18, 19, 20 - 20/10/2016**

Opzioni di scambio su due sottostanti ed opzione composta call su call nel modello di Black e Scholes.

[cfr. Lamberton e Lapeyre, Cap. 4, Problemi 3 e 5]

### **Lezioni 21, 22 - 24/10/2016**

Opzioni asiatiche nel modello di Black e Scholes.

[cfr. Lamberton e Lapeyre, Cap. 4, Problema 7]

### **Lezioni 23, 24, 25 - 27/10/2016**

Modelli generali (di Ito) per la finanza: il “rumore” descritto tramite un browniano in  $\mathbb{R}^d$ , il prezzo del titolo non rischioso con un tasso di interesse istantaneo aleatorio, i prezzi degli  $m$  titoli rischiosi nel mercato descritti tramite processi di Ito. Definizione di opzione europea. Le strategie autofinanzianti e la loro caratterizzazione usando il portafoglio scontato. Le strategie ammissibili e di arbitraggio. Definizione di mercato privo di arbitraggio. La misura equivalente di martingala  $\mathbb{P}^*$ : esistenza. Il moto browniano sotto  $\mathbb{P}^*$ . Le proprietà di martingala del portafoglio scontato associato a strategie autofinanzianti e ammissibili. Strategie replicanti e prezzo di “non arbitraggio” per un’opzione replicabile in presenza di una misura di martingala equivalente. Indipendenza del prezzo dalla misura di martingala equivalente.

[cfr. Appunti, paragrafi 13.1, 13.2, 13.3, 13.4]

### **Lezioni 26, 27, 28 - 03/11/2016**

Definizione di mercato completo ed unicità della misura di martingala equivalente in un mercato completo.

Il modello di diffusione per la descrizione dei mercati finanziari: definizione, richieste sui coefficienti del modello. Condizione necessaria e sufficiente per l’esistenza della misura equivalente di martingala. La condizione sufficiente classica sulla volatilità che garantisce l’esistenza della misura equivalente di martingala (dimensione browniano  $\geq$  numero di sottostanti e  $\sigma\sigma^*$  uniformemente ellittica). Teorema classico di completezza del mercato.

[cfr. Appunti, paragrafi 13.4, 13.5]

### **Lezioni 29, 30 - 07/11/2016**

Breve discussione sui mercati non completi. Equazione alle derivate parziali associata al prezzo di un’opzione europea quando esiste la funzione-prezzo ed è noto essere regolare; la strategia di copertura come il gradiente della funzione-prezzo. Le Greche di un’opzione. La regolarità della funzione-prezzo di un’opzione europea di payoff dipendente dal prezzo dei titoli a maturità: legame con EDP paraboliche. Operatori differenziali lineari del secondo ordine uniformemente ellittici e diffusione sottostante. La regolarità della funzione-prezzo come conseguenza del teorema di esistenza ed unicità (forte) di una EDP parabolica con termine del secondo ordine uniformemente ellittico (cambio di variabile).

[cfr. Appunti, paragrafo 13.5]

### **Lezioni 31, 32, 33 - 10/11/2016**

EDP paraboliche in un dominio limitato (problema di Cauchy-Dirichlet): formula di rappresentazione per la soluzione. La formula di Feynman-Kac per la rappresentazione delle soluzioni EDP paraboliche con problema di Cauchy su  $\mathbb{R}^m$ .

[cfr. Appunti, paragrafi 10.3, 10.4]

### **Lezioni 34, 35, 36 - 14/11/2016**

Uso della formula di Feynman-Kac per determinare le condizioni sui coefficienti del modello e sulla funzione payoff affinché la funzione-prezzo sia una soluzione regolare dell'EDP parabolica associata. In particolare, calcolo della copertura tramite la formula di Ito. Cenni sulle opzioni con barriere: la funzione-prezzo come soluzione di una EDP grazie alla formula di rappresentazione. Cenni sulla soluzione fondamentale di un problema parabolico e legame con la densità di transizione: stime gaussiane ed equazione backward.

[cfr. Appunti, paragrafi 13.6, 10.5]

### **Lezioni 37, 38, 39 - 17/11/2016**

Metodi Monte Carlo: generalità. L'IC di output. Simulazione di v.a. gaussiane tramite il generatore di Box-Muller. Simulazione del moto browniano e del moto browniano geometrico. Calcolo numerico con tecniche Monte Carlo nel modello di Black e Scholes del prezzo di opzioni call/put standard. Confronto con le formule esatte e studio empirico della velocità di convergenza. Breve discussione sul calcolo del prezzo quando il processo sottostante è una diffusione qualsiasi (metodo di Eulero) e non necessariamente il processo di Black-Scholes. Calcolo numerico con tecniche Monte Carlo nel modello di Black e Scholes del prezzo di opzioni asiatiche call/put standard. Uso delle formule di parità per la validazione del programma.

[cfr. Appunti su metodi Monte Carlo]

### **Lezioni 40, 41, 42 - 21/11/2016**

Opzioni con barriera: valutazione numerica del prezzo con Monte Carlo tramite (a) approssimazione del sup su  $[0, T]$  con il max osservato ai tempi  $t_1 < t_2 < \dots < t_N$  (stimatore Monte Carlo distorto) e (b) con una formula di rappresentazione che coinvolge solo il valore del sottostante a  $T$  (stimatore Monte Carlo non distorto). Formule di “parità” per la validazione dei programmi. Opzioni su due sottostanti (call e digital) e relative formule di “parità”.

[cfr. Appunti su metodi Monte Carlo]

### **Lezioni 43, 44, 45 - 24/11/2016**

Calcolo numerico via Monte Carlo della copertura: il metodo delle differenze finite e il metodo basato sulla rappresentazione della delta sotto forma di aspettazione. Copertura dinamica.

[cfr. Appunti su metodi Monte Carlo]

### **Lezioni 46, 47, 48 - 28/11/2016**

Breve panoramica sui tre possibili approfondimenti: opzioni americane, tassi di interesse e applicazioni del calcolo di Malliavin in finanza.

## Seminario - 05/12/2016

Seminario di Maya Briani (IAC-CNR, Roma) su trattamento numerico di EDP e applicazioni in finanza.

### PARTE II: **APPROFONDIMENTI**

Le ulteriori ore a disposizione del corso seguono un corso di letture su un argomento a scelta tra:

- **OPZIONI AMERICANE** [cfr. Appunti di D. Lamberton, link al sito del corso]
- **INTRODUZIONE AL CALCOLO DI MALLIAVIN E APPLICAZIONI IN FINANZA** [cfr. Appunti]
- **MODELLI DI DIFFUSIONE PER I TASSI D'INTERESSE** [cfr. Lamberton e Lapeyre, Cap. 6 ed esercizi del Cap. 6]

Gli appunti si possono richiedere inviando un messaggio a [caramell@mat.uniroma2.it](mailto:caramell@mat.uniroma2.it)