PS - Probabilità e Statistica, 9 cfu (mat/06)
A.A. 2015/2016

Informazioni e programma del corso
Università Tor Vergata
docenti: Lucia Caramellino[1], Claudio Macci[2]

Informazioni sul corso

Prerequisiti

Il corso presuppone la conoscenza delle nozioni di analisi matematica e di algebra lineare che sono state svolte nei corsi precedenti del corso di laurea o che vengono introdotte parallelamente negli altri corsi dello stesso semestre.

Modalità d'esame

L'esame consiste in una prova scritta ed in una prova orale. La prova scritta vale solo per la sessione in cui viene superata (ad esempio, lo scritto di giugno e/o luglio è spendibile solo nella I sessione). Gli esoneri valgono solo per la I sessione.
Per sostenere l'esame, gli studenti devono obbligatoriamente prenotarsi alla pagina ServiziOnLine di Tor Vergata. Per gli appelli della II e III sessione [settembre 2016 e febbraio 2017] la chiusura delle prenotazioni è anticipata di una settimana rispetto alla data dello scritto.

Testi consigliati

- P. Baldi: *Calcolo delle Probabilità. Seconda edizione.* McGraw-Hill, 2011.
- Tutorati I-XI, scaricabili all'indirizzo

  `www.mat.uniroma2.it/~caramell/did_1314/ps.htm`
- L. Caramellino: *Complementi sulla convergenza di variabili aleatorie*, note scaricabili all'indirizzo

  `www.mat.uniroma2.it/~caramell/did_1314/ps.htm`

[1]Dipartimento di Matematica, Università di Roma-Tor Vergata. Email: caramell@mat.uniroma2.it; web: http://www.mat.uniroma2.it/~caramell
[2]Dipartimento di Matematica, Università di Roma-Tor Vergata. Email: macci@mat.uniroma2.it; web: http://www.mat.uniroma2.it/~macci

Programma

Spazi di probabilità

Spazi campionari, σ-algebre (o insiemi degli eventi), misure di probabilità. Lo spazio di probabilità $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. Spazi di probabilità uniformi. Monotonia della probabilità.
La probabilità condizionata (anche come "nuova" misura di probabilità). Conseguenze: la formula delle probabilità totali e la formula di Bayes.
Indipendenza tra eventi. Le prove ripetute e lo schema (successo-insuccesso) di Bernoulli. Richiami di calcolo combinatorio (combinazioni, disposizioni etc). Urne composte da due classi diverse di elementi ed estrazioni: lo schema con rimpiazzo (di Bernoulli) e senza rimpiazzo (legge ipergeometrica).

[cfr. Baldi, Cap 1; Tutorati I e II]

Variabili aleatorie discrete

Definizione di variabile aleatoria (v.a.). Variabili aleatorie discrete. Legge, distribuzione e densità discreta. Legge bernoulliana, binomiale, ipergeometrica, geometrica e geometrica modificata, di Poisson. Proprietà di mancanza di memoria delle leggi geometriche.
Esistenza di v.a. con densità discreta p (cioè, costruzione di uno spazio di probabilità su cui è definita una v.a. discreta che ha p come con densità). Funzioni di ripartizione: le tre proprietà caratteristiche. Funzioni di ripartizione di v.a. discrete.
V.a. discrete m-dimensionali: densità congiunta. Calcolo delle marginali dalla densità congiunta. Esistenza di più leggi congiunte aventi le stesse marginali. La legge uniforme su un insieme finito di $\mathbb{R}^m$.
La legge condizionale di X dato che $Y = y$. Proprietà ed uso.
Definizione di indipendenza tra v.a. Caso v.a. discrete: l'indipendenza di $X_1, \dots, X_m$ equivale alla fattorizzazione della densità discreta congiunta $p_{X_1,\dots,X_m}(x_1, \dots, x_m)$ nel prodotto delle densità marginali $p_{X_1}(x_1), \dots, p_{X_m}(x_m)$. Indipendenza di due v.a. quando la densità congiunta si fattorizza nel prodotto di funzioni dipendenti ciascuna dalle singole variabili. Equivalenza tra la richiesta $X \perp\!\!\!\perp Y$ e $p_{X|Y}(\cdot \mid y) \equiv p_X(\cdot)$, per ogni y. Calcolo della densità congiunta di X e Y nota la densità condizionale di X dato Y e la marginale di Y.
Funzioni di v.a. discrete: studio della legge. Indipendenza di $\phi(X)$ e $\psi(Y)$ quando X e Y sono discrete e indipendenti. Calcoli con le densità. La densità della somma di due v.a. discrete quando è nota la densità congiunta. Caso particolare quando le due v.a. sono indipendenti (prodotto di convoluzione). Esempi: somma di binomiali indipendenti con lo stesso parametro p; somma di Poisson indipendenti. La legge del max e del min di due v.a.
Definizione di speranza matematica. Esistenza e calcolo della speranza matematica per funzioni di variabili aleatorie. Le proprietà della speranza matematica. Esistenza nel caso di v.a. limitate. Calcolo della speranza matematica per la funzione indicatrice (bernoulliana) e per la legge binomiale, ipergeometrica, geometrica (e geometrica modificata), di Poisson. L'identità di Wald per somme aleatorie. Fattorizzazione nel caso di v.a. indipen-

denti. Esistenza della media nel caso di v.a. il cui valore assoluto si stima dall'alto con una v.a. che ha speranza matematica finita.
La media condizionale come speranza matematica rispetto alla densità condizionale. Invarianza della media condizionale nel caso di v.a. indipendenti.
Momenti e momenti centrati. Esistenza del momento di ordine r quando esiste il momento di ordine $k \geq r$. La somma di v.a. che hanno momento di ordine k ha ancora momento di ordine k. La varianza. Interpretazione della media e della varianza: media come migliore costante che approssima una v.a. e varianza come indicatore della qualità dell'approssimazione. La media condizionata di X dato Y come "migliore approssimazione" di X con una funzione della Y. Disuguaglianza di Markov e di Chebyshev. Proprietà della varianza (dilatazione e invarianza per traslazioni deterministiche). La covarianza. Relazione tra non correlazione ed indipendenza di due v.a. Varianza della somma di v.a. Calcolo della varianza per v.a. di legge bernoulliana, binomiale, di Poisson, geometrica e geometrica modificata. Coefficiente di correlazione. Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz.
La retta di regressione: significato di "dipendenza positiva" e "dipendenza negativa" in termini di covarianza. La legge dei grandi numeri.

[cfr. Baldi, Cap 2 (esclusi paragrafi 10 e 11); Tutorati II, III, IV, V]

Variabili aleatorie assolutamente continue

Richiami sulle proprietà delle funzioni di ripartizione. V.a. continue. V.a. assolutamente continue (a.c.): definizione di densità e proprietà; esistenza della densità nota la funzione di ripartizione. La legge uniforme, esponenziale, di Weibull.
I quantili di una legge.
Calcolo di leggi: densità di una v.a. che è funzione di una v.a. assolutamente continua (ad esempio, legge di X^2 e di $aX + b$ quando X ha densità).
V.a. indipendenti. Calcolo della densità del max e del min di due v.a. indipendenti e con densità.
Vettori aleatori a.c. di $\mathbb{R}^2$: densità congiunta e proprietà; esistenza delle densità marginali e loro rappresentazione in termini di integrale, quando esiste la densità congiunta. La legge uniforme su un insieme di $\mathbb{R}^d$ di misura positiva. La relazione di indipendenza tra due v.a. e la fattorizzazione della densità congiunta.
Vettori aleatori in $\mathbb{R}^m$: la densità congiunta; le densità marginali e loro calcolo a partire dalla densità congiunta; indipendenza e proprietà di fattorizzazione della densità congiunta. Indipendenza di v.a. che sono funzioni di vettori aleatori indipendenti.
Calcoli con densità congiunte: densità della somma; densità di una funzione "buona" di v.a. tramite il teorema del cambio di variabile. Legge di una trasformazione lineare-affine di un vettore aleatorio con densità. Uso del teorema del cambio di variabile per il calcolo di densità.
Speranza matematica per v.a. con densità continua: definizione e proprietà. Momenti. Varianza e covarianza. Leggi normali, gamma, beta: proprietà, calcolo della media e della varianza. I quantili della legge gaussiana e lettura della tavola della normale.

[cfr. Baldi, Cap. 3, da par. 3.1 a par. 3.9; Tutorati VI, VII]

La funzione caratteristica

Variabili aleatorie complesse. La funzione caratteristica (f.c.). Calcolo esplicito per la legge binomiale, geometrica, di Poisson, esponenziale, uniforme. Le proprietà: la f.c. della somma di v.a. indipendenti; la f.c. di una trasformazione lineare-affine; il legame tra la derivabilità e i momenti (s.d.); se due v.a. hanno la stessa f.c. allora hanno la stessa legge (s.d.); la f.c. delle v.a. che sono coordinate del vettore aleatorio; caratterizzazione della f.c. di v.a. indipendenti.
La legge normale multivariata: definizione in termini della funzione caratteristica; interpretazione dei parametri (vettore delle medie e matrice di covarianza); scrittura esplicita della densità di probabilità quando la matrice di covarianza è non degenere e cenni sul fatto che la densità esiste se e solo se la matrice di covarianza è non degenere. Proprietà delle normali multivariate: legge gaussiana delle componenti; equivalenza tra componenti indipendenti e covarianza nulla; legge normale di una trasformazione lineare affine e, di conseguenza, legge gaussiana di un qualsiasi sottovettore. La disuguaglianza di Chebycev e la legge dei grandi numeri per v.a. a.c.

[cfr. Baldi, Cap. 3, par. 3.13 e par. 3.14; Tutorato VIII]

Convergenza ed approssimazione

La convergenza quasi certa e la convergenza in probabilità. Proprietà della convergenza in probabilità (se $X_n \overset{P}{\to} c$ allora per ogni f continua si ha $f(X_n) \overset{P}{\to} f(c)$; se $X_n \overset{P}{\to} X$ e $Y_n \overset{P}{\to} Y$ allora $X_n + Y_n \overset{P}{\to} X + Y$; se $X_n \overset{P}{\to} X$ e $c_n \to c$ allora $c_n X_n \overset{P}{\to} cX$). La legge dei grandi numeri riscritta in termini di convergenza in probabilità. I classici stimatori non distorti e consisenti della media e della varianza. La convergenza in legge come convergenza più debole della convergenza in probabilità (se $X_n \overset{P}{\to} X$ allora $X_n \overset{\mathcal{L}}{\to} X$, solo cenni). La convergenza in legge di v.a. $\mathrm{Bi}(n, \lambda/n)$ ad una v.a. di legge $\mathrm{Po}(\lambda)$.
Il teorema di convergenza di Lévy (senza dimostrazione).
Il teorema limite centrale e l'approssimazione normale. Approssimazione normale della legge $\Gamma(n, \lambda)$. La correzione di continuità nell'approssimazione normale della legge $\mathrm{Bi}(n, p)$.
Problemi di stima: stima della media teorica tramite la media empirica, confronto tra la disuguaglianza di Chebyschev e l'approssimazione normale, in particolare della legge $\mathrm{Bi}(n, p)$ per n grande (anche con la correzione di continuità). Intervalli di fiducia. Uso dell'approssimazione normale per il calcolo di intervalli di fiducia approssimati. Caso in cui non si conosce la varianza: 1) uso di una stima dall'alto, se esiste; 2) uso del classico stimatore non distorto e consistente.

[cfr. Baldi, Cap. 4; note distribuite dal docente; Tutorato IX]

Catene di Markov

Processi aleatori e catene di Markov: definizione. Catene di Markov omogenee. La catena che esprime il "problema della rovina del giocatore". Funzione o matrice di transizione come matrice stocastica. La matrice di transizione in m passi. La distribuzione congiunta di una catena di Markov in k istanti prefissati. La relazione di comunicazione tra stati della

catena. Classi chiuse e irriducibili; stati assorbenti. Stati transitori e ricorrenti. Caratterizzazione degli stati transitori (e quindi ricorrenti) per catena di Markov a stati finiti (s.d.). Decomposizione degli stati in unione disgiunta dell'insieme degli stati transitori e delle classi irriducibili (s.d.).
Le distribuzioni invarianti. Il teorema di Markov-Kakutani sull'esistenza di una distribuzione invariante per catene a stati finiti. Il teorema di Markov (s.d.). Il criterio di regolarità per catene finite, irriducibili e tali che almeno un elemento della diagonale della matrice di transizione sia positivo. Distribuzione invariante per matrici di transizione bistocastiche.
Stazionarietà di una distribuzione reversibile. Passeggiate a caso su grafi (esempi che danno luogo a catene regolari oppure a catene non regolari). Il teorema di unicità della distribuzione invariante per catene finite ed irriducibili. Distribuzione stazionaria di una catena di nascita e morte irriducibile a stati finiti. Cenno al caso con stati numerabili. Teorema Ergodico.
Sistema di equazioni per le probabilità di passaggio per una classe di stati C quando la catena parte da uno stato che non appartiene a C ma che comunica con C. Le probabilità di passaggio nella classe degli stati ricorrenti quando la catena parte da uno stato transitorio. Probabilità di assorbimento in zero per una catena di nascita e morte a stati finiti e con barriere assorbenti al bordo: il caso specifico del problema della rovina del giocatore.
Tempi medi di assorbimento nella classe degli stati ricorrenti quando la catena parte da uno stato transitorio: il sistema associato. Calcolo del tempo medio della durata del gioco nel problema della rovina del giocatore. Sistema ricorsivo per le probabilità di passaggio nella classe degli stati ricorrenti entro un certo istante. Tempo medio di passaggio in uno stato k per una catena di Markov irriducibile: la catena di appoggio che ha k come stato assorbente ed il sistema associato.

[cfr. Baldi, Cap 5, da par. 5.1 a par. 5.6; Tutorati X, XI]