

PS - PROBABILITÀ E STATISTICA 2, 6 CFU (MAT/06)
A.A 2015/2016

INFORMAZIONI E PROGRAMMA DEL CORSO

UNIVERSITÀ TOR VERGATA

DOCENTI: LUCIA CARAMELLINO¹, CLAUDIO MACCI²

Informazioni sul corso

Prerequisiti

Il corso presuppone la conoscenza dei contenuti del corso Probabilità e Statistica 1 e delle nozioni di analisi matematica e di algebra lineare che sono state svolte nei corsi precedenti del corso di laurea o che vengono introdotte parallelamente negli altri corsi dello stesso semestre.

Modalità d'esame

L'esame consiste in una prova scritta ed in una prova orale. La prova scritta vale solo per la sessione in cui viene superata (ad esempio, lo scritto di giugno e/o luglio è spendibile solo nella I sessione).

Per sostenere l'esame, gli studenti devono obbligatoriamente prenotarsi alla pagina ServiziOnLine di Tor Vergata. Per gli appelli della II e III sessione [settembre 2016 e febbraio 2017] la chiusura delle prenotazioni è anticipata di una settimana rispetto alla data dello scritto.

Testi consigliati

- P. Baldi: *Calcolo delle Probabilità. Seconda edizione*. McGraw-Hill, 2011.
- Tutorati I-XI, scaricabili all'indirizzo
www.mat.uniroma2.it/~caramell/did_1213/ps.htm
- L. Caramellino: *Complementi sulla convergenza di variabili aleatorie*, note scaricabili all'indirizzo
www.mat.uniroma2.it/~caramell/did_1314/ps.htm

¹Dipartimento di Matematica, Università di Roma-Tor Vergata. Email: caramell@mat.uniroma2.it; web: <http://www.mat.uniroma2.it/~caramell>

²Dipartimento di Matematica, Università di Roma-Tor Vergata. Email: macci@mat.uniroma2.it; web: <http://www.mat.uniroma2.it/~macci>

Programma

Richiami

Richiami su spazi di probabilità; v.a. discrete: leggi bernoulliana, binomiale, ipergeometrica, geometrica e geometrica modificata, di Poisson. Funzioni di ripartizione: le tre proprietà caratteristiche. Funzioni di ripartizione di v.a. discrete. Densità congiunta di vettori aleatori discreti. Calcolo delle marginali dalla densità congiunta. La legge condizionale di X dato che $Y = y$. Proprietà ed uso. Indipendenza tra v.a. La densità della somma di due v.a. discrete quando è nota la densità congiunta. Caso particolare quando le due v.a. sono indipendenti (prodotto di convoluzione). Esempi: somma di binomiali indipendenti con lo stesso parametro p ; somma di Poisson indipendenti. La legge del max e del min di due v.a. Speranza matematica. La media condizionale come speranza matematica rispetto alla densità condizionale. Invarianza della media condizionale nel caso di v.a. indipendenti. Momenti e momenti centrati. La varianza. Disuguaglianza di Chebyshev. La covarianza. Relazione tra non correlazione ed indipendenza di due v.a. Varianza della somma di v.a. Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz. La retta di regressione: significato di “dipendenza positiva” e “dipendenza negativa” in termini di covarianza. La legge dei grandi numeri.

[cfr. Tutorati I, II, III, IV, V]

Variabili aleatorie assolutamente continue

Richiami sulle proprietà delle funzioni di ripartizione. V.a. continue. V.a. assolutamente continue (a.c.): definizione di densità e proprietà; esistenza della densità nota la funzione di ripartizione. La legge uniforme, esponenziale, di Weibull.

I quantili di una legge.

Calcolo di leggi: densità di una v.a. che è funzione di una v.a. assolutamente continua (ad esempio, legge di X^2 e di $aX + b$ quando X ha densità).

V.a. indipendenti. Calcolo della densità del max e del min di due v.a. indipendenti e con densità.

Vettori aleatori a.c. di \mathbb{R}^2 : densità congiunta e proprietà; esistenza delle densità marginali e loro rappresentazione in termini di integrale, quando esiste la densità congiunta. La legge uniforme su un insieme di \mathbb{R}^d di misura positiva. La relazione di indipendenza tra due v.a. e la fattorizzazione della densità congiunta.

Vettori aleatori in \mathbb{R}^m : la densità congiunta; le densità marginali e loro calcolo a partire dalla densità congiunta; indipendenza e proprietà di fattorizzazione della densità congiunta. Indipendenza di v.a. che sono funzioni di vettori aleatori indipendenti.

Calcoli con densità congiunte: densità della somma; densità di una funzione “buona” di v.a. tramite il teorema del cambio di variabile. Legge di una trasformazione lineare-affine di un vettore aleatorio con densità. Uso del teorema del cambio di variabile per il calcolo di densità.

Speranza matematica per v.a. con densità continua: definizione e proprietà. Momenti. Varianza e covarianza. Leggi normali, gamma, beta: proprietà, calcolo della media e della varianza. I quantili della legge gaussiana e lettura della tavola della normale.

[cfr. Baldi, Cap. 3, da par. 3.1 a par. 3.9; Tutorati VI, VII]

La funzione caratteristica

Variabili aleatorie complesse. La funzione caratteristica (f.c.). Calcolo esplicito per la legge binomiale, geometrica, di Poisson, esponenziale, uniforme. Le proprietà: la f.c. della somma di v.a. indipendenti; la f.c. di una trasformazione lineare-affine; il legame tra la derivabilità e i momenti (s.d.); se due v.a. hanno la stessa f.c. allora hanno la stessa legge (s.d.); la f.c. delle v.a. che sono coordinate del vettore aleatorio; caratterizzazione della f.c. di v.a. indipendenti.

La legge normale multivariata: definizione in termini della funzione caratteristica; interpretazione dei parametri (vettore delle medie e matrice di covarianza); scrittura esplicita della densità di probabilità quando la matrice di covarianza è non degenere e cenni sul fatto che la densità esiste se e solo se la matrice di covarianza è non degenere. Proprietà delle normali multivariate: legge gaussiana delle componenti; equivalenza tra componenti indipendenti e covarianza nulla; legge normale di una trasformazione lineare affine e, di conseguenza, legge gaussiana di un qualsiasi sottovettore. La disuguaglianza di Chebycev e la legge dei grandi numeri per v.a. a.c.

[cfr. Baldi, Cap. 3, par. 3.13 e par. 3.14; Tutorato VIII]

Convergenza ed approssimazione

La convergenza quasi certa e la convergenza in probabilità. Proprietà della convergenza in probabilità (se $X_n \xrightarrow{P} c$ allora per ogni f continua si ha $f(X_n) \xrightarrow{P} f(c)$; se $X_n \xrightarrow{P} X$ e $Y_n \xrightarrow{P} Y$ allora $X_n + Y_n \xrightarrow{P} X + Y$; se $X_n \xrightarrow{P} X$ e $c_n \rightarrow c$ allora $c_n X_n \xrightarrow{P} cX$). La legge dei grandi numeri riscritta in termini di convergenza in probabilità. I classici stimatori non distorti e consistenti della media e della varianza. La convergenza in legge come convergenza più debole della convergenza in probabilità (se $X_n \xrightarrow{P} X$ allora $X_n \xrightarrow{L} X$, solo cenni). La convergenza in legge di v.a. $\text{Bi}(n, \lambda/n)$ ad una v.a. di legge $\text{Po}(\lambda)$.

Il teorema di convergenza di Lévy (senza dimostrazione).

Il teorema limite centrale e l'approssimazione normale. Approssimazione normale della legge $\Gamma(n, \lambda)$. La correzione di continuità nell'approssimazione normale della legge $\text{Bi}(n, p)$. Problemi di stima: stima della media teorica tramite la media empirica, confronto tra la disuguaglianza di Chebyshev e l'approssimazione normale, in particolare della legge $\text{Bi}(n, p)$ per n grande (anche con la correzione di continuità). Intervalli di fiducia. Uso dell'approssimazione normale per il calcolo di intervalli di fiducia approssimati. Caso in cui non si conosce la varianza: 1) uso di una stima dall'alto, se esiste; 2) uso del classico stimatore non distorto e consistente.

[cfr. Baldi, Cap. 4; note distribuite dal docente; Tutorato IX]

Catene di Markov

Processi aleatori e catene di Markov: definizione. Catene di Markov omogenee. La catena che esprime il "problema della rovina del giocatore". Funzione o matrice di transizione

come matrice stocastica. La matrice di transizione in m passi. La distribuzione congiunta di una catena di Markov in k istanti prefissati. La relazione di comunicazione tra stati della catena. Classi chiuse e irriducibili; stati assorbenti. Stati transitori e ricorrenti. Caratterizzazione degli stati transitori (e quindi ricorrenti) per catena di Markov a stati finiti (s.d.). Decomposizione degli stati in unione disgiunta dell'insieme degli stati transitori e delle classi irriducibili (s.d.).

Le distribuzioni invarianti. Il teorema di Markov-Kakutani sull'esistenza di una distribuzione invariante per catene a stati finiti. Il teorema di Markov (s.d.). Il criterio di regolarità per catene finite, irriducibili e tali che almeno un elemento della diagonale della matrice di transizione sia positivo. Distribuzione invariante per matrici di transizione bistocastiche.

Stazionarietà di una distribuzione reversibile. Passeggiate a caso su grafi (esempi che danno luogo a catene regolari oppure a catene non regolari). Il teorema di unicità della distribuzione invariante per catene finite ed irriducibili. Distribuzione stazionaria di una catena di nascita e morte irriducibile a stati finiti. Cenno al caso con stati numerabili. Teorema Ergodico.

Sistema di equazioni per le probabilità di passaggio per una classe di stati C quando la catena parte da uno stato che non appartiene a C ma che comunica con C . Le probabilità di passaggio nella classe degli stati ricorrenti quando la catena parte da uno stato transitorio. Probabilità di assorbimento in zero per una catena di nascita e morte a stati finiti e con barriere assorbenti al bordo: il caso specifico del problema della rovina del giocatore.

Tempi medi di assorbimento nella classe degli stati ricorrenti quando la catena parte da uno stato transitorio: il sistema associato. Calcolo del tempo medio della durata del gioco nel problema della rovina del giocatore. Sistema ricorsivo per le probabilità di passaggio nella classe degli stati ricorrenti entro un certo istante. Tempo medio di passaggio in uno stato k per una catena di Markov irriducibile: la catena di appoggio che ha k come stato assorbente ed il sistema associato.

[cfr. Baldi, Cap 5, da par. 5.1 a par. 5.6; Tutorati X, XI]