Diario delle lezioni e del tutorato di

Probabilità e Statistica

a.a. 2015/2016

`www.mat.uniroma2.it/~caramell/did_1516/ps.htm`

01/03/2016 - Lezioni 1, 2 [Caramellino]
Breve introduzione al corso. Fenomeni deterministici ed aleatori. Spazi campionari, σ-algebre (o insiemi degli eventi), misure di probabilità. Lo spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Esempi. La probabilità uniforme. Proprietà generali della probabilità.

[cfr. Baldi, Par. 1.1, 1.2, 1.3, 1.4]

02/03/2016 - Lezioni 3, 4 [Caramellino]
Monotonia della probabilità. La probabilità condizionata (anche come "nuova" misura di probabilità). Conseguenze: la formula delle probabilità totali e la formula di Bayes. Esempi ed esercizi.

[cfr. Baldi, Par. 1.5]

03/03/2016 - Lezioni 5, 6 [Caramellino]
Indipendenza tra eventi. Le prove ripetute e lo schema (successo-insuccesso) di Bernoulli. Esempi ed esercizi.

[cfr. Baldi, Par. 1.5]

07/03/2016 - Tutorato 1 [Carfagnini]

[cfr. pagina web del corso]

08/03/2016 - Lezioni 7, 8 [Caramellino]
Richiami di calcolo combinatorio (permutazioni, disposizioni, combinazioni). Urne composte da due classi diverse di elementi ed estrazioni: lo schema con rimpiazzo (di Bernoulli, legge binomiale) e senza rimpiazzo (legge ipergeometrica). Esempi ed esercizi.

[cfr. Baldi, Par. 1.6]

09/03/2016 - Lezioni 9, 10 [Caramellino]
Definizione di variabile aleatoria e discussione sulle richieste della definizione. Variabili aleatorie discrete. Densità discreta. Esempi: v.a. bernoulliane (funzione indicatrice), binomiali, ipergeometriche.

[cfr. Baldi, Par. 2.1, 2.2]

11/03/2016 - Lezioni 11, 12 [Caramellino]
Legge geometrica e geometrica modificata. Esempi ed esercizi. Proprietà di mancanza di memoria delle leggi geometriche. Assegnata una densità discreta, costruzione di uno spazio di probabilità su cui è definita una v.a. con densità discreta uguale a quella data. La legge di Poisson, anche come legge limite di leggi binomiali.

[cfr. Baldi, Par. 2.2]

14/03/2016 - Tutorato 2 [Carfagnini]

[cfr. pagina web del corso]

15/03/2016 - Lezioni 13, 14 [Caramellino]
Funzioni di ripartizione: le tre proprietà caratteristiche. Funzioni di ripartizione di v.a. discrete. V.a. discrete m-dimensionali: densità congiunta. Calcolo delle marginali dalla densità congiunta.

[cfr. Baldi, Par. 2.3, 2.4]

16/03/2016 - Lezioni 15, 16 [Caramellino]
La legge uniforme. Esistenza di più leggi congiunte aventi le stesse marginali. Esempi ed esercizi sull'uso della densità (discreta) congiunta. Definizione di indipendenza tra v.a. Caso v.a. discrete: l'indipendenza di $X_1, \ldots, X_m$ equivale alla fattorizzazione della densità discreta congiunta $p_{X_1,\ldots,X_m}(x_1, \ldots, x_m)$ nel prodotto delle densità marginali $p_{X_1}(x_1) \cdots p_{X_m}(x_m)$. Equivalenza tra l'indipendenza di due v.a. X e Y discrete e la condizione $p_{XY}(x, y) = \varphi(x)\psi(y)$, per qualche funzione φ e ψ. Esempi ed esercizi.

[cfr. Baldi, Par. 2.3, 2.4]

18/03/2016 - Lezioni 17, 18 [Caramellino]
La legge condizionale di X dato che $Y = y$. Equivalenza tra la richiesta $X \perp\!\!\!\perp Y$ e $p_{X|Y}(\cdot \mid y) \equiv p_X(\cdot)$, per ogni y. Calcolo della densità congiunta di X e Y nota la densità condizionale di X dato Y e la marginale di Y. Esempi ed esercizi.

[cfr. Baldi, Par. 2.4]

21/03/2016 - Tutorato 3 [Carfagnini]

[cfr. pagina web del corso]

22/03/2016 - Lezioni 19, 20 [Caramellino]
Esercizi ed esempi sulla densità discreta congiunta, sulla densità discreta condizionale e sull'indipendenza di v.a. Funzioni di v.a. discrete: studio della legge. Calcoli con le densità. Indipendenza di $\phi(X)$ e $\psi(Y)$ quando X e Y sono discrete e indipendenti.

[cfr. Baldi, Par. 2.4, 2.5]

23/03/2016 - Lezioni 21, 22 [Caramellino]
La densità della somma di v.a. discrete quando è nota la densità congiunta. Caso particolare quando le v.a. sono indipendenti (prodotto di convoluzione). Esempi: somma di binomiali indipendenti con lo stesso parametro p e somma di Poisson indipendenti. La legge del max e del min di due v.a. Esempi ed esercizi.

[cfr. Baldi, Par. 2.5]

30/03/2016 - Lezioni 23, 24 [Caramellino]
Definizione di speranza matematica per v.a. discrete. Esistenza nel caso di v.a. limitate. Esistenza e calcolo della speranza matematica per funzioni di variabili aleatorie. La media aritmetica come la speranza matematica di una v.a. uniforme su un insieme finito. Le proprietà della speranza matematica (linearità, positività etc.). Calcolo della speranza matematica per la legge bernoulliana (caso particolare: funzione indicatrice), binomiale e ipergeometrica.

[cfr. Baldi, Par. 2.6]

01/04/2016 - Lezioni 25, 26 [Caramellino]
Calcolo della speranza matematica della legge geometrica, geometrica modificata e di Poisson. L'identià di Wald per somme aleatorie. Fattorizzazione nel caso di v.a. indipendenti: $X \perp\!\!\!\perp Y$ sse per ogni funzione φ, ψ tali che $\varphi(X)$ e $\psi(Y)$ hanno media allora $\varphi(X)\psi(Y)$ ha media e $\mathbb{E}(\varphi(X)\psi(Y)) = \mathbb{E}(\varphi(X))\mathbb{E}(\psi(Y))$. La media condizionale. Esempi ed esercizi.

[cfr. Baldi, Par. 2.6]

04/04/2016 - Tutorato 4 [Carfagnini]

[cfr. pagina web del corso]

05/04/2016 - Lezioni 27, 28 [Caramellino]
Esistenza della media nel caso di v.a. il cui valore assoluto si stima dall'alto con una v.a. che ha speranza matematica finita. Momenti e momenti centrati. Esistenza del momento di ordine r quando esiste il momento di ordine $k \geq r$. La somma di v.a. che hanno momento di ordine k ha ancora momento di ordine k. La varianza. Interpretazione della media e della varianza: media come migliore costante che approssima una v.a. e varianza come indicatore della qualità dell'approssimazione ("dispersione" intorno alla media). Disuguaglianza di Chebyshev. Proprietà della varianza (dilatazione e invarianza per traslazioni deterministiche). La covarianza. Relazione tra non correlazione ed indipendenza di due v.a. Varianza della somma di v.a. Calcolo della varianza per v.a. di legge bernoulliana, binomiale, di Poisson.

[cfr. Baldi, Par. 2.7]

06/04/2016 - Lezione 29 [Caramellino]
Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz. Coefficiente di correlazione. Esempi. La retta di regressione: significato di "dipendenza positiva" e "dipendenza negativa" in termini di covarianza. La legge (debole) dei grandi numeri per v.a. discrete. Esempi.

[cfr. Baldi, Par. 2.7]

08/04/2016 - Lezione 30, 31 [Caramellino]
La disuguaglianza di Markov e utilizzo per la velocità di convergenza nella LGN. La media come "migliore approssimazione" deterministica di una v.a. X e la media condizionata di X dato Y come "migliore approssimazione" di X con una funzione della Y. Esempi ed esercizi.

[cfr. Baldi, Par. 2.7]

11/04/2016 - Tutorato 5 [Carfagnini]

[cfr. pagina web del corso]

12/04/2016 - Lezione 32, 33 [Caramellino]
Richiami sulle proprietà delle funzioni di ripartizione. V.a. continue. V.a. assolutamente continue: definizione di densità e proprietà; esistenza della densità nota la funzione di ripartizione. Esempi di leggi assolutamente continue: legge uniforme, esponenziale, di Weibull. Calcolo di leggi: densità di una v.a. che è funzione di una v.a. assolutamente continua. Esempio: legge di X^2 quando X ha densità continua.

[cfr. Baldi, Par. 3.1, 3.2]

13/04/2016 - Lezione 34, 35 [Caramellino]
Legge di $aX+b$ quando X ha densità. Vettori aleatori a.c. di $\mathbb{R}^d$: densità congiunta e proprietà; esistenza delle densità marginali e rappresentazione in termini di integrale. La legge uniforme su un insieme di $\mathbb{R}^d$ di misura positiva e finita. Esempi. V.a. indipendenti con densità continua: fattorizzazione della densità nel prodotto delle densità marginali, e viceversa.

[cfr. Baldi, Par. 3.2, 3.3]

18/04/2016 - Tutorato 6 [Carfagnini]

[cfr. pagina web del corso]

19/04/2016 - Lezione 36, 37 [Caramellino]
La legge del max e del min di due v.a. indipendenti ed assolutamente continue. Esempi ed esercizi sulla relazione di indipendenza tra due v.a. e la fattorizzazione della densità congiunta. Calcoli con densità congiunte. Densità della somma di due v.a. con densità congiunta. Esempi. Calcoli con densità congiunte: uso del teorema del cambio di variabile (TCV) per calcolare la densità di $\phi(X)$ quando X è una v.a. su $\mathbb{R}^d$ con densità e $\phi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ è diffeomerfismo. Esempio: legge di una trasformazione lineare-affine di un vettore aleatorio con densità. Esempi sull'uso del teorema del cambio di variabile per il calcolo di densità. Versione bis dell'uso del TCV: basta che la trasformazione ϕ ristretta a n aperti $O_1, \dots, O_n$ a due a due disgiunti sia un diffeomorfismo e che la probabilità che con probabilità 1 X appartenga nell'unione degli aperti.

[cfr. Baldi, Par. 3.3, 3.4]

20/04/2016 - Lezione 38, 39 [Caramellino]
Speranza matematica per v.a. con densità: definizione. Speranza matematica per v.a. che sono funzioni di v.a. con densità continua. Proprietà della speranza matematica. Esempi: speranza matematica della legge uniforme e della legge esponenziale. Momenti. Varianza e disuguaglianza di Caucht-Schwarz. Esempi. Covarianza. Matrice di covarianza e proprietà. Leggi normali: proprietà, esistenza dei momenti, calcolo della media e della varianza.

[cfr. Baldi, Par. 3.5, 3.6]

22/04/2016 - Lezione 40, 41, 42 [Caramellino]
I quantili della legge gaussiana e lettura della tavola della normale. Leggi gamma: proprietà (in particolare: se $X \perp\!\!\!\perp Y$, $X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$ e $Y \sim \Gamma(\beta, \lambda)$ allora $X + Y \sim \Gamma(\alpha + \beta, \lambda)$), esistenza e calcolo dei momenti, calcolo della media e della varianza. La legge chi-quadro. La relazione con la somma dei quadrati di gaussiane indipendenti e, di conseguenza, calcolo dei momenti di una gaussiana standard. La legge beta: proprietà, esistenza e calcolo dei momenti, calcolo della media e della varianza.

[cfr. Baldi, Par. 3.7, 3.9]

25/04/2016 - Tutorato 7[1]

[cfr. pagina web del corso]

26/04/2016 - Lezione 43, 44 [Caramellino]

Variabili aleatorie complesse. La funzione caratteristica (f.c.). Calcolo esplicito per la legge binomiale, geometrica, di Poisson, esponenziale, uniforme. Le proprietà: la f.c. della somma di v.a. indipendenti; la f.c. di una trasformazione lineare-affine; il legame tra la derivabilità della f.c. ed i momenti (s.d.). La f.c. della legge gaussiana. Altre proprietà legate alle f.c.: se due v.a. hanno la stessa f.c. allora hanno la stessa legge (s.d.); la f.c. delle coordinate del vettore aleatorio; uso della f.c. per dimostrare che una trasformazione linerare di gaussiane indipendenti ha legge gaussiana; caratterizzazione della f.c. di v.a. indipendenti. La legge normale standard multivariata: definizione anche in termini della funzione caratteristica

[cfr. Baldi, Par. 3.13, 3.14]

27/04/2016 - Lezione 45, 46 [Caramellino]

La legge normale multivariata: definizione in termini della funzione caratteristica; interpretazione dei parametri (vettore delle medie e matrice di covarianza). Scrittura esplicita della densità di probabilità quando la matrice di covarianza è non degenere e cenni sul fatto che la densità esiste se e solo se la matrice di covarianza è non degenere. Proprietà dei vettori gaussiani: legge gaussiana delle componenti; equivalenza tra componenti indipendenti e covarianza nulla quando il vettore aleatorio ha legge gaussiana; legge normale di una trasformazione lineare affine di un vettore aleatorio normale e, di conseguenza, legge gaussiana di un qualsiasi sottovettore. Esempi ed esercizi. La convergenza quasi certa e la convergenza in probabilità: definizione.

[cfr. Baldi, Par. 3.13, 3.14]

28/04/2016 - Lezione 47, 48, 49 [Caramellino]

Proprietà della convergenza in probabilità (se $X_n \xrightarrow{P} c$ allora per ogni f continua si ha $f(X_n) \xrightarrow{P} f(c)$; se $X_n \xrightarrow{P} X$ e $Y_n \xrightarrow{P} Y$ allora $X_n + Y_n \xrightarrow{P} X + Y$; se $X_n \xrightarrow{P} X$ e $c_n \to c$ allora $c_n X_n \xrightarrow{P} cX$). La legge dei grandi numeri riscritta in termini di convergenza in probabilità. I classici stimatori non distorti e consisenti della media e della varianza. La convergenza in legge. Esempio: convergenza in legge di v.a. $\mathrm{Bi}(n, \lambda/n)$ ad una v.a. di legge $\mathrm{Po}(\lambda)$.

[cfr. Appunti su convergenza[2]; Baldi, Par. 4.1, 4.2]

02/05/2016 - Lezione 50, 51 [Caramellino]

La convergenza in legge come convergenza più debole della convergenza in probabilità (se $X_n \xrightarrow{P} X$ allora $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$, solo cenni). Il teorema di convergenza di Lévy (senza dimostrazione). Esempi ed esercizi sulla convergenza in legge. Il teorema del limite centrale.

[cfr. Appunti su convergenza[3]; Baldi, Par. 4.2, 4.3]

[1] Essendo festa, il foglio con gli esercizi è solo distribuito. Gli esercizi saranno discussi nella sessione di tutorato successiva.

[2] Disponibili alla pagina web del corso

[3] Disponibili alla pagina web del corso

03/05/2016 - Lezione 52, 53 [Caramellino]
Applicazione del TLC: l'approssimazione normale. Primo esempio di rilievo: approssimazione normale della legge $\mathrm{Bi}(n,p)$ con n grande. La "correzione di continuità" nell'approssimazione normale per v.a. discrete, in particolare per la legge $\mathrm{Bi}(n,p)$ con n grande. L'approssimazione normale della legge $\Gamma(n,\lambda)$, per n grande. Problemi di stima: confronto tra la disuguaglianza di Chebyschev e l'approssimazione normale, in particolare della legge $\mathrm{Bi}(n,p)$ per n grande (anche con la correzione di continuità). Esempi ed esercizi.

[cfr. Baldi, Par. 4.4, 4.5]

04/05/2016 - Tutorato 8 [Carfagnini]

[cfr. pagina web del corso]

06/05/2016 - Lezione 54, 55, 56 [Caramellino]
Intervalli di fiducia: definizione formale. Uso dell'approssimazione normale per il calcolo di intervalli di fiducia approssimati. Caso in cui non si conosce la varianza: 1) uso di una stima dall'alto, se esiste; 2) uso dello stimatore non distorto e consistente. Esempi ed esercizi, anche di riepilogo.

[cfr. Baldi, Par. 4.5]

09/05/2016 - Tutorato 9 [Carfagnini]

[cfr. pagina web del corso]

10/05/2016 - Lezione 57, 58 [Macci]
Processi aleatori: breve introduzione. Esempio: il capitale del giocatore nel "problema della rovina del giocatore". Definizione formale di catena di Markov. Catene di Markov omogenee. La catena che esprime il "problema della rovina del giocatore". Funzione o matrice di transizione come matrice stocastica. La matrice di transizione in m passi. La distribuzione congiunta di una catena di Markov in k istanti prefissati. La relazione di comunicazione tra stati della catena. Classi chiuse e irriducibili; stati assorbenti. Stati transitori e ricorrenti. Caratterizzazione degli stati transitori (e quindi ricorrenti) per catena di Markov a stati finiti (senza dimostrazione). Decomposizione degli stati in unione disgiunta dell'insieme degli stati transitori e delle classi irriducibili (senza dimostrazione).

[cfr. Baldi, Par. 5.1, 5.2, 5.3]

11/05/2016 - Lezione 59, 60 [Macci]
Esempi, in particolare la catena associata al problema della rovina del giocatore. Le distribuzioni invarianti. Il teorema di Markov-Kakutani sull'esistenza di una distribuzione invariante per catene a stati finiti. Il teorema di Markov (senza dimostrazione). Il criterio di regolarità per catene finite, irriducibili e tali che almeno un elemento della diagonale della matrice di transizione sia positivo. Distribuzione invariante per matrici di transizione bistocastiche.

[cfr. Baldi, Par. 5.3, 5.4]

16/05/2016 - Tutorato 10 [Carfagnini]

[cfr. pagina web del corso]

17/05/2016 - Lezione 61, 62 [Macci]
Stazionarietà di una distribuzione reversibile. Esempi ed esercizi. Passeggiate a caso su grafi. Esempi di passeggiate a caso su grafo che danno luogo ad una catena regolare oppure ad una catena non regolare. Il teorema di unicità della distribuzione invariante per catene finite ed irriducibili.

[cfr. Baldi, Par. 5.4]

18/05/2016 - Lezione 63, 64 [Macci]
Distribuzione stazionaria di una catena di nascita e morte irriducibile a stati finiti. Cenno al caso con stati numerabili. Teorema Ergodico. Sistema di equazioni per le probabilità di passaggio per una classe di stati C quando la catena parte da uno stato che non appartiene a C ma che comunica con C. Le probabilit'a di passaggio nella classe degli stati ricorrenti quando la catena parte da uno stato transitorio.

[cfr. Baldi, Par. 5.4, 5.6]

20/05/2016 - Lezione 65, 66 [Macci]
Probabilità di assorbimento in zero per una catena di nascita e morte a stati finiti e con barriere assorbenti al bordo: il caso specifico del problema della rovina del giocatore. Tempi medi di assorbimento nella classe degli stati ricorrenti quando la catena parte da uno stato transitorio: il sistema associato. Esercizi.

[cfr. Baldi, Par. 5.6]

23/05/2016 - Tutorato 11 [Carfagnini]

[cfr. pagina web del corso]

24/05/2016 - Lezione 67, 68 [Macci]
Calcolo del tempo medio della durata del gioco nel problema della rovina del giocatore. Esercizi.

[cfr. Baldi, Par. 5.6]

25/05/2016 - Lezione 69, 70 [Macci]
Sistema ricorsivo per le probabilità di passaggio nella classe degli stati ricorrenti entro un certo istante. Esempio di applicazione. Tempo medio di passaggio in uno stato k per una catena di Markov irriducibile: la catena di appoggio che ha k come stato assorbente ed il sistema associato. Esercizi.

[cfr. Baldi, Par. 5.6]

27/05/2016 - Lezione 71, 72 [Macci]
Esercizi ed esempi.