

Diario delle lezioni di  
**Metodi e Modelli dei Mercati Finanziari**  
a.a. 2015/2016

PARTE I: **OPZIONI EUROPEE E METODI MONTE CARLO**

**Lezioni 1, 2 - 28/09/2015**

Breve introduzione al corso. Richiami di calcolo stocastico: integrale di Ito, processi di Ito, formula di Ito.

[cfr. Baldi, appunti, Cap. 10; Lamberton e Lapeyre, Cap. 3]

**Lezioni 3, 4 - 29/09/2015**

Risultati generali sulla “martingala esponenziale (complessa)”. Il teorema di Girsanov.

[cfr. Baldi, appunti, Cap. 10; Lamberton e Lapeyre, Cap. 3]

**Lezioni 5, 6 - 01/10/2015**

Conclusione della dimostrazione del teorema di Girsanov. I teoremi di rappresentazione della martingale browniana.

[cfr. Baldi, appunti, Cap. 10; Lamberton e Lapeyre, Cap. 3]

**Lezioni 7, 8 - 05/10/2015**

Caratterizzazione delle misure equivalenti su  $(\Omega, \mathcal{F}_T)$ , dove  $\mathcal{F}_T = \sigma(B_s, s \leq T) \vee \mathcal{N}$  ( $B$  = browniano,  $\mathcal{N}$  = insiemi di misura nulla). Una condizione sufficiente perché una martingala locale browniana sia una martingala. Ancora richiami di calcolo stocastico: equazioni differenziali stocastiche (teorema classico di esistenza ed unicità, stime in  $L^p$  e markovianità della soluzione). Il modello di Black e Scholes: introduzione.

[cfr. Baldi, appunti, Cap. 10; Lamberton e Lapeyre, Cap. 3 e 4]

**Lezioni 9, 10 - 06/10/2015**

I due problemi (prezzo/copertura) legati alle opzioni. Strategie autofinanzianti: caratterizzazione in termini della dinamica del portafoglio scontato. La misura “equivalente di martingala” o “di rischio neutro”. Strategie ammissibili e replicanti. Il teorema di replicabilità delle opzioni europee di quadrato integrabile (sotto la misura di rischio neutro). Il prezzo delle opzioni europee.

[cfr. Lamberton e Lapeyre, Cap. 4]

### **Lezioni 11, 12 - 08/10/2015**

Dimostrazione del teorema di replicabilità. Opzioni il cui payoff dipende dal sottostante a maturità: la funzione-prezzo e l'equazione alle derivate parziali ad essa associata. Le Greche di un'opzione. La formula di Black e Scholes per la funzione-prezzo della call. La formula di parità per opzioni call/put e la formula per la funzione-prezzo della put.

[cfr. Lamberton e Lapeyre, Cap. 4]

### **Lezioni 13, 14 (15/10/2015), 15, 16 (19/10/2015), 17, 18 (20/10/2015), 19, 20 (22/10/2015)**

Problemi dal testo di Lamberton e Lapeyre:

- il modello di Black e Scholes con coefficienti dipendenti dal tempo;
- il modello di Garman-Kohlhagen per opzioni su valuta estera;
- opzioni di scambio (su due sottostanti) nel modello di Black e Scholes;
- opzione composta call su call nel modello di Black e Scholes;
- opzione call asiatica nel modello di Black e Scholes.

[cfr. Lamberton e Lapeyre, Cap. 4, Problemi 1, 2, 3, 5, 7]

### **Lezioni 21, 22 - 26/10/2015**

Modelli generali (di Ito) per la finanza: il “rumore” descritto tramite un browniano in  $\mathbb{R}^d$ , il prezzo del titolo non rischioso con un tasso di interesse istantaneo aleatorio, i prezzi degli  $m$  titoli rischiosi nel mercato descritti tramite processi di Ito. Definizione di opzione europea. Le strategie autofinanzianti e la loro caratterizzazione usando il portafoglio scontato. Le strategie ammissibili e di arbitraggio. Definizione di mercato privo di arbitraggio. La misura equivalente di martingala  $\mathbb{P}^*$ : esistenza. Il moto browniano sotto  $\mathbb{P}^*$ .

[cfr. Appunti, paragrafi 11.1, 11.2, 11.3]

### **Lezioni 23, 24 - 27/10/2015**

Le proprietà di martingala del portafoglio scontato associato a strategie autofinanzianti e ammissibili. Strategie replicanti e prezzo di “non arbitraggio” per un'opzione replicabile in presenza di una misura di martingala equivalente. Indipendenza del prezzo dalla misura di martingala equivalente. Definizione di mercato completo ed unicità della misura di martingala equivalente in un mercato completo.

[cfr. Appunti, paragrafi 11.3, 11.4]

### **Lezioni 25, 26 - 29/10/2015**

Il modello di diffusione per la descrizione dei mercati finanziari: definizione, richieste sui coefficienti del modello. Condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza della misura equivalente di martingala. La condizione sufficiente classica sulla volatilità che garantisce l'esistenza della misura equivalente di martingala (dimensione browniano  $\geq$  numero di sottostanti e  $\sigma\sigma^*$  uniformemente ellittica).

[cfr. Appunti, paragrafo 11.5]

### **Lezioni 27, 28 - 09/11/2015**

Teorema classico di completezza del mercato. Breve discussione sui mercati non completi.

[cfr. Appunti, paragrafo 11.5]

### **Lezioni 29, 30 - 10/11/2015**

Equazione alle derivate parziali associata al prezzo di un'opzione europea quando esiste la funzione-prezzo ed è noto essere regolare; la strategia di copertura come il gradiente della funzione-prezzo. Le Greche di un'opzione. La regolarità della funzione-prezzo di un'opzione europea di payoff: legame con EDP paraboliche. Operatori differenziali lineari del secondo ordine uniformemente ellittici e diffusione sottostante. La regolarità della funzione-prezzo come conseguenza del teorema di esistenza ed unicità (forte) di una EDP parabolica con termine del secondo ordine uniformemente ellittico (cambio di variabile). EDP paraboliche in un dominio limitato (problema di Cauchy-Dirichlet): formula di rappresentazione per la soluzione.

[cfr. Appunti, paragrafo 11.5 e capitolo 9]

### **Lezioni 31, 32 - 12/11/2015**

Dimostrazione della formula di rappresentazione per soluzioni di EDP paraboliche in un dominio limitato (problema di Cauchy-Dirichlet). Il prezzo di opzioni-barriera come soluzione di una EDP grazie alla formula di rappresentazione. La formula di Feynman-Kac di rappresentazione delle soluzioni EDP paraboliche con problema di Cauchy su  $\mathbb{R}^m$ .

[cfr. Appunti, capitolo 9]

### **Lezioni 33, 34 - 16/11/2015**

Dimostrazione della formula di Feynman-Kac. Cenni sulla soluzione fondamentale di un problema parabolico e legame con la densità di transizione.

[cfr. Appunti, capitolo 9]

### **Lezioni 35, 36 - 17/11/2015**

Metodi Monte Carlo: generalità. L'IC di output. Simulazione di v.a. gaussiane tramite il generatore di Box-Muller. Simulazione del moto browniano e del moto browniano geometrico. Breve discussione sul calcolo del prezzo quando il processo sottostante è una diffusione qualsiasi (metodo di Eulero) e non necessariamente il processo di Black-Scholes.

[cfr. Appunti su metodi Monte Carlo]

### **Lezioni 37, 38 - 19/11/2015**

Calcolo numerico con tecniche Monte Carlo nel modello di Black e Scholes del prezzo di opzioni call/put standard e asiatiche. Confronto con le formule esatte e uso delle formule di parità.

[cfr. Appunti su metodi Monte Carlo]

### **Seminario - 23/11/2015**

Seminario di Claude Martini (Zeliade Systems) per presentare la piattaforma informatica Zanadu, che può essere usata per validare gli algoritmi che fanno parte del programma del corso.

### **Lezioni 39, 40 - 24/11/2015**

Valutazione numerica del prezzo di opzioni su due sottostanti (call e digital) e relative formule di “parità”. Calcolo numerico via Monte Carlo della copertura: il metodo delle differenze finite e il metodo basato sulla rappresentazione della delta sotto forma di aspettazione.

[cfr. Appunti su metodi Monte Carlo]

### **Lezioni 41, 42 - 26/11/2015**

Dimostrazione dell’espressione dei pesi del metodo “alla Malliavin” per il calcolo della delta. Copertura dinamica.

[cfr. Appunti su metodi Monte Carlo]

### **Lezioni 43, 44 - 30/11/2015**

Breve panoramica sui tre possibili approfondimenti: opzioni americane, calcolo di Malliavin, tassi di interesse.

### **Seminario - 10/12/2015**

Seminario di Maya Briani (IAC-CNR, Roma) su trattamento numerico di EDP e applicazioni in finanza.

## **PARTE II: APPROFONDIMENTI**

Le ulteriori ore a disposizione del corso seguono un corso di letture su un argomento a scelta ad esempio tra:

- **OPZIONI AMERICANE** [cfr. Appunti di D. Lamberton, link al sito del corso]
- **INTRODUZIONE AL CALCOLO DI MALLIAVIN E APPLICAZIONI IN FINANZA** [cfr. Appunti]
- **MODELLI DI DIFFUSIONE PER I TASSI D’INTERESSE** [cfr. Lamberton e Lapeyre, Cap. 6 ed esercizi del Cap. 6]

Gli appunti si possono richiedere inviando un messaggio a [caramell@mat.uniroma2.it](mailto:caramell@mat.uniroma2.it)

Potranno essere presi in considerazione ulteriori argomenti di approfondimento proposti dagli studenti.