

Diario delle lezioni e del tutorato di

Probabilità e Statistica

a.a. 2014/2015

www.mat.uniroma2.it/~caramell/did_1415/ps.htm

02/03/2015 - Lezioni 1, 2

Breve introduzione al corso. Fenomeni deterministici ed aleatori. Spazi campionari, σ -algebre (o insiemi degli eventi), misure di probabilità. Lo spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Esempi.

[cfr. Baldi, Par. 1.1, 1.2]

04/03/2015 - Lezioni 3, 4, 5

La probabilità uniforme. Proprietà generali della probabilità. Monotonia della probabilità. La probabilità condizionata (anche come “nuova” misura di probabilità). Conseguenze: la formula delle probabilità totali e la formula di Bayes. Esempi ed esercizi.

[cfr. Baldi, Par. 1.3 1.4, 1.5]

06/03/2015 - Lezioni 6, 7, 8

Esercizi sulla formula delle probabilità totali e la formula di Bayes. Indipendenza tra eventi. Le prove ripetute e lo schema (successo-insuccesso) di Bernoulli. esempi ed esercizi.

[cfr. Baldi, Par. 1.5]

09/03/2015 - Tutorato 1

[cfr. pagina web del corso]

11/03/2015 - Lezioni 9, 10, 11

Richiami di calcolo combinatorio (permutazioni, disposizioni, combinazioni). Esempi ed esercizi. Urne composte da due classi diverse di elementi ed estrazioni: lo schema con rimpiazzo (di Bernoulli) e senza rimpiazzo (legge ipergeometrica).

Definizione di variabile aleatoria e discussione sulle richieste della definizione. La funzione indicatrice.

[cfr. Baldi, Par. 1.6, 2.1]

13/03/2015 - Lezioni 12, 13, 14

Variabili aleatorie discrete. Legge, distribuzione e densità discreta. Legge bernoulliana, binomiale, ipergeometrica, geometrica e geometrica modificata. Esempi ed esercizi. Proprietà di mancanza di memoria delle leggi geometriche. Assegnata una densità discreta, costruzione di uno spazio di probabilità su cui è definita una v.a. con densità discreta uguale a quella data.

[cfr. Baldi, Par. 2.2]

16/03/2015 - Tutorato 2

[cfr. pagina web del corso]

18/03/2015 - Lezioni 15, 16, 17

La legge di Poisson, anche come legge limite di leggi binomiali. La legge uniforme. Funzioni di ripartizione: le tre proprietà caratteristiche. Funzioni di ripartizione di v.a. discrete. V.a. discrete m -dimensionali: densità congiunta. Calcolo delle marginali dalla densità congiunta. Esempi. Esistenza di più leggi congiunte aventi le stesse marginali. Esempi ed esercizi.

[cfr. Baldi, Par. 2.2, 2.3, 2.4]

20/03/2015 - Lezioni 18, 19, 20

Definizione di indipendenza tra v.a. Caso v.a. discrete: l'indipendenza di X_1, \dots, X_m equivale alla fattorizzazione della densità discreta congiunta $p_{X_1, \dots, X_m}(x_1, \dots, x_m)$ nel prodotto delle densità marginali $p_{X_1}(x_1) \cdots p_{X_m}(x_m)$. Equivalenza tra due v.a. X e Y indipendenti con la condizione $p_{XY}(x, y) = \varphi(x)\psi(y)$, per qualche funzione φ e ψ . Esempi ed esercizi. La legge condizionale di X dato che $Y = y$. Proprietà ed uso, in particolare calcolo della densità congiunta di X e Y nota la densità condizionale di X dato Y e la marginale di Y . Equivalenza tra la richiesta $X \perp\!\!\!\perp Y$ e $p_{X|Y}(\cdot | y) \equiv p_X(\cdot)$, per ogni y .

[cfr. Baldi, Par. 2.2, 2.3, 2.4]

23/03/2015 - Tutorato 3

[cfr. pagina web del corso]

25/03/2015 - Lezioni 21, 22, 23

Esercizi ed esempi sulla densità discreta congiunta, sulla densità discreta condizionale e sull'indipendenza di v.a. Funzioni di v.a. discrete: studio della legge. Calcoli con le densità. Indipendenza di $\phi(X)$ e $\psi(Y)$ quando X e Y sono discrete e indipendenti.

[cfr. Baldi, Par. 2.4, 2.5]

26/03/2015 - Lezioni 24, 25

La densità della somma di v.a. discrete quando è nota la densità congiunta. Caso particolare quando le v.a. sono indipendenti (prodotto di convoluzione). Esempi: somma di binomiali indipendenti con lo stesso parametro p ; somma di Poisson indipendenti; somma di geometriche indipendenti. La legge del max e del min di due v.a. Esempi ed esercizi. Definizione di speranza matematica. Esistenza e calcolo della speranza matematica per funzioni di variabili aleatorie. La media aritmetica come la speranza matematica di una v.a. uniforme su un insieme finito.

[cfr. Baldi, Par. 2.4, 2.5, 2.6]

31/03/2015 - Tutorato 4

[cfr. pagina web del corso]

01/04/2015 - Lezioni 26, 27, 28

Le proprietà della speranza matematica (linearità, positività etc.). Esistenza nel caso di v.a. limitate o di v.a. il cui valore assoluto si stima dall'alto con una v.a. che ha speranza matematica finita. Calcolo della speranza matematica per la funzione indicatrice (bernoulliana) e per la legge binomiale, ipergeometrica, geometrica (e geometrica modificata), di Poisson. L'identità di

Wald per somme aleatorie. Fattorizzazione nel caso di v.a. indipendenti. La media condizionale. Momenti e momenti centrati. Esistenza del momento di ordine r quando esiste il momento di ordine $k \geq r$. La somma di v.a. che hanno momento di ordine k ha ancora momento di ordine k .

[cfr. Baldi, Par. 2.6, 2.7]

08/04/2015 - Lezioni 29, 30, 31

La varianza. Interpretazione della media e della varianza: media come migliore costante che approssima una v.a. e varianza come indicatore della qualità dell'approssimazione ("dispersione" intorno alla media). Disuguaglianza di Markov e disuguaglianza di Chebyshev. Proprietà della varianza (dilatazione e invarianza per traslazioni deterministiche). La covarianza. Relazione tra non correlazione ed indipendenza di due v.a. Varianza della somma di v.a. Calcolo della varianza per v.a. di legge bernoulliana, binomiale, geometrica e geometrica modificata, di Poisson. Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz.

[cfr. Baldi, Par. 2.7]

10/04/2015 - Lezioni 32, 33, 34

Coefficiente di correlazione. Esempi. La varianza della legge ipergeometrica. La retta di regressione: significato di "dipendenza positiva" e "dipendenza negativa" in termini di covarianza. Esempi ed esercizi.

[cfr. Baldi, Par. 2.9]

13/04/2015 - Tutorato 5

[cfr. pagina web del corso]

17/04/2015 - Lezioni 35, 36, 37

La legge (debole) dei grandi numeri per v.a. discrete. Esempi di applicazione. Richiami sulle proprietà delle funzioni di ripartizione. V.a. continue. V.a. assolutamente continue: definizione di densità e proprietà; esistenza della densità nota la funzione di ripartizione. Esempi di leggi assolutamente continue: legge uniforme, esponenziale, di Weibull. Calcolo di leggi: densità di una v.a. che è funzione di una v.a. assolutamente continua. Esempio: legge di X^2 quando X ha densità continua.

[cfr. Baldi, Par 2.8; Par. 3.1, 3.2]

18/04/2015 - I esonero

[testo e soluzioni alla pagina web del corso]

20/04/2015 - Lezioni 38, 39

Legge di $aX + b$ quando X ha densità. V.a. indipendenti. Calcolo della densità del max e del min di due v.a. indipendenti con densità. Vettori aleatori a.c. di \mathbb{R}^2 : densità congiunta e proprietà; esistenza delle densità marginali e loro rappresentazione in termini di integrale; il viceversa nel caso di v.a. indipendenti.

[cfr. Baldi, Par. 3.2, 3.3]

22/04/2015 - Lezioni 40, 41, 42

Esempi ed esercizi sulla relazione di indipendenza tra due v.a. e la fattorizzazione della densità congiunta. Vettori aleatori su \mathbb{R}^m : la densità congiunta; le densità marginali e loro calcolo a partire dalla densità congiunta; indipendenza e proprietà di fattorizzazione della densità congiunta. Calcoli con densità congiunte. Densità della somma di due v.a. con densità congiunta. Esempi. Calcoli con densità congiunte: densità di una funzione “buona” di v.a. tramite il teorema del cambio di variabile. Esempio: legge di una trasformazione lineare-affine di un vettore aleatorio con densità. Esempi sull’uso del teorema del cambio di variabile per il calcolo di densità.

[cfr. Baldi, Par. 3.3, 3.4]

24/04/2015 - Lezione 43; Tutorato 6

La legge uniforme su un insieme di \mathbb{R}^m di misura positiva e finita. Esempi. Speranza matematica per v.a. con densità: definizione. Speranza matematica per v.a. che sono funzioni di v.a. con densità continua. Proprietà della speranza matematica. Esempi: speranza matematica della legge uniforme e della legge esponenziale. Tutorato.

[cfr. Baldi, Par. 3.5; pagina web del corso]

27/04/2015 - Lezioni 44, 45

Momenti. Varianza e covarianza. Matrice di covarianza. Leggi normali: proprietà, esistenza dei momenti, calcolo della media e della varianza.

[cfr. Baldi, Par. 3.5, 3.6]

29/04/2015 - Lezioni 46, 47, 48

Leggi gamma: proprietà, esistenza dei momenti, calcolo della media e della varianza. La legge chi-quadro e la relazione con la somma dei quadrati di gaussiane indipendenti. La legge beta: media e varianza. Esempi ed esercizi. Variabili aleatorie complesse. La funzione caratteristica. Calcolo esplicito per la legge binomiale, geometrica, di Poisson, esponenziale, uniforme. Le proprietà: la f.c. della somma di v.a. indipendenti; la f.c. di una trasformazione lineare-affine; il legame con i momenti (s.d.).

[cfr. Baldi, Par. 3.7, 3.9, 3.13]

04/05/2015 - Tutorato 7

[cfr. pagina web del corso]

06/05/2015 - Lezioni 49, 50, 51

La f.c. della legge gaussiana. Altre proprietà legate alle f.c.: se due v.a. hanno la stessa f.c. allora hanno la stessa legge (s.d.); la f.c. delle coordinate del vettore aleatorio; caratterizzazione della f.c. di v.a. indipendenti. La legge normale multivariata: definizione in termini della funzione caratteristica; interpretazione dei parametri (vettore delle medie e matrice di covarianza). Scrittura esplicita della densità di probabilità quando la matrice di covarianza è non degenere e cenni sul fatto che la densità esiste se e solo se la matrice di covarianza è non degenere. Proprietà dei vettori gaussiani: legge gaussiana delle componenti; equivalenza tra componenti indipendenti e covarianza nulla; legge normale di una trasformazione lineare affine. Esempi ed esercizi. La convergenza quasi certa e la convergenza in probabilità: definizione.

[cfr. Baldi, Par. 3.13, 3.14]

08/05/2015 - Lezioni 52, 53, 54

La legge dei grandi numeri riscritta in termini di convergenza in probabilità. I classici stimatori non distorti e consistenti della media e della varianza. La convergenza in legge. Il teorema di convergenza di Lévy (senza dimostrazione). Esempi ed esercizi sulla convergenza in legge. Il teorema del limite centrale. Applicazione: l'approssimazione normale, in particolare della legge $Bi(n, p)$ per n grande.

[cfr. Baldi, Par. 4.1, 4.2, 4.3, 4.4]

11/05/2015 - Tutorato 8

[cfr. pagina web del corso]

13/05/2015 - Lezioni 55, 56, 57

La “correzione di continuità” nell'approssimazione normale per v.a. discrete, in particolare per la legge $Bi(n, p)$ con n grande. L'approssimazione normale della legge $\Gamma(n, \lambda)$, per n grande. Problemi di stima: confronto tra la disuguaglianza di Chebyshev e l'approssimazione normale; intervalli di fiducia, anche approssimati (con uso dell'approssimazione normale e dello stimatore classico della varianza). Esempi ed esercizi. Processi aleatori: breve introduzione. Esempio: il capitale del giocatore nel “problema della rovina del giocatore”.

[cfr. Baldi, Par. 4.4, 4.5, 5.1]

15/05/2015 - Lezioni 58, 59, 60

Definizione formale di catena di Markov. Catene di Markov omogenee. La catena che esprime il “problema della rovina del giocatore”. Funzione o matrice di transizione come matrice stocastica. La matrice di transizione in m passi. La distribuzione congiunta di una catena di Markov in k istanti prefissati. La relazione di comunicazione tra stati della catena. Classi chiuse e irriducibili; stati assorbenti. Stati transitori e ricorrenti. Caratterizzazione degli stati transitori (e quindi ricorrenti) per catena di Markov a stati finiti (senza dimostrazione). Decomposizione degli stati in unione disgiunta dell'insieme degli stati transitori e delle classi irriducibili (senza dimostrazione). Esempi, in particolare la catena associata al problema della rovina del giocatore.

[cfr. Baldi, Par. 5.1, 5.2, 5.3]

18/05/2015 - Tutorato 9

[cfr. pagina web del corso]

20/05/2015 - Lezioni 61, 62, 63

Le distribuzioni invarianti. Il teorema di Markov-Kakutani sull'esistenza di una distribuzione invariante per catene a stati finiti. Distribuzione invariante per matrici di transizione bistocastiche. Stazionarietà di una distribuzione reversibile. Esempi ed esercizi. Passeggiate a caso su grafi. Catene regolari e relazioni con le catene irriducibili. Il teorema di Markov (senza dimostrazione). Esempio di passeggiata a caso su grafo che dà luogo ad una catena regolare.

[cfr. Baldi, Par. 5.4]

22/05/2015 - Lezioni 64, 65, 66

Il criterio di regolarità per catene finite, irriducibili e tali che almeno un elemento della diagonale della matrice di transizione sia positivo. Esempi ed esercizi. Il teorema di unicità della

distribuzione invariante per catene finite ed irriducibili. Distribuzione invariante per la catena di nascita e morte a stati finiti (nel caso di irriducibilità). Distribuzioni invarianti per la catena che descrive il problema della rovina del giocatore. Probabilità di passaggio in una classe C . Il sistema che lega le probabilità di passaggio in C quando la catena parte da uno stato i che non è in C ma che comunica con C .

[cfr. Baldi, Par. 5.4, 5.6]

25/05/2015 - Tutorato 10

[cfr. pagina web del corso]

27/05/2015 - Lezioni 67, 68, 69

La probabilità di passaggio nella classe degli stati ricorrenti quando la catena parte da uno stato i transitorio. Caso della rovina del giocatore: prova del fatto che il gioco prima o poi finisce. Calcolo esplicito della probabilità di raggiungimento dello 0 per la catena di nascita e morte. Esempio: la probabilità di rovina nel caso di gioco equo ($p = q$) e non ($p \neq q$). Tempo medio di assorbimento nella classe degli stati ricorrenti quando la catena parte da uno stato transitorio: il sistema associato.

[cfr. Baldi, Par. 5.6]

29/05/2015 - Lezioni 70, 71, 72

Tempo medio di passaggio in uno stato k per una catena di Markov irriducibile: la catena di appoggio che ha k come stato assorbente ed il sistema associato. Esempi ed esercizi.

[cfr. Baldi, Par. 5.6]

01/06/2015 - Tutorato 11

[cfr. pagina web del corso]