

Diario delle lezioni di
Metodi e Modelli dei Mercati Finanziari
a.a. 2014/2015

PARTE I: **OPZIONI EUROPEE E METODI MONTE CARLO**¹

Lezioni 1, 2, 3 - 29/09/2014

Breve introduzione al corso. Richiami di calcolo stocastico: integrale di Ito, processi di Ito, formula di Ito. Il teorema di Girsanov: risultati preliminari.

[cfr. Baldi, Cap. 6, 7; Lamberton e Lapeyre, Cap. 3]

Lezioni 4, 5, 6 - 01/10/2014

Il teorema di Girsanov. Il teorema di rappresentazione delle martingale browniane.

[cfr. Baldi, Cap. 7; Lamberton e Lapeyre, Cap. 3]

Lezioni 7, 8, 9 - 06/10/2014

Ancora richiami di calcolo stocastico: equazioni differenziali stocastiche (teorema classico di esistenza ed unicità, stime in L^p e markovianità della soluzione).

I due problemi (prezzo/copertura) legati alle opzioni. Il moto browniano geometrico. Il modello di Black e Scholes. Strategie autofinanzianti.

[cfr. Baldi, Cap. 8; Lamberton e Lapeyre, Cap. 3 e 4.]

Lezioni 10, 11, 12 - 08/10/2014

Strategie autofinanzianti: caratterizzazione in termini della dinamica del portafoglio scontato. La misura “di martingala equivalente” o “di rischio neutro”. Strategie ammissibili e replicanti. Il teorema di replicabilità delle opzioni di quadrato integrabile (sotto la misura di rischio neutro) e prezzo delle opzioni europee.

[cfr. Lamberton e Lapeyre, Cap. 4]

Lezioni 13, 14, 15 - 13/10/2014

Equazione alle derivate parziali associata alla funzione-prezzo quando il payoff è funzione del sottostante a maturità e calcolo esplicito della copertura. La formula di parità per opzioni call/put. Le formule di Black e Scholes per il prezzo e la copertura di opzioni call e put. Le Greche di un'opzione.

Il modello di Black e Scholes con coefficienti dipendenti dal tempo.

[cfr. Lamberton e Lapeyre, Cap. 4; Problema 1 al Cap. 4]

¹Le lezioni del 20, 22 e 27 ottobre 2014 sono state tenute dal Prof. Baldi.

Lezioni 16, 17, 18 - 15/10/2014

Il modello di Garman-Kohlhagen: prezzo e copertura di opzioni su valuta estera.

[cfr. Lamberton e Lapeyre, Problema 2 al Cap. 4]

Lezioni 19, 20 - 20/10/2014

Opzioni di scambio (su due sottostanti) nel modello di Black e Scholes in dimensione 2.

[cfr. Lamberton e Lapeyre, Problema 3 al Cap. 4]

Lezioni 21, 22 - 22/10/2014

Opzione composta call su call nel modello di Black e Scholes.

[cfr. Lamberton e Lapeyre, Problema 5 al Cap. 4]

Lezioni 23, 24 - 27/10/2014

Prezzo dell'opzione call asiatica nel modello di Black e Scholes. Confronto con il prezzo della call standard e con la call asiatica scritta sulla media geometrica.

[cfr. Lamberton e Lapeyre, Problema 7 al Cap. 4]

Lezioni 25, 26, 27 - 03/11/2014

Modelli di diffusione per i mercati finanziari: ipotesi matematiche e di mercato. Prime proprietà. Strategie autofinanzianti: caratterizzazione del differenziale di Ito del portafoglio scontato. Strategie ammissibili e di arbitraggio. Le misure equivalenti a quella di mercato. Definizione di misura di martingala equivalente. Caratterizzazione delle misure di martingala equivalenti

[cfr. Appunti, Paragrafi 1, 2.1-2.3]

Lezioni 28, 29, 30 - 05/11/2014

La condizione sufficiente "classica" per l'esistenza della misura di martingala equivalente ($d \geq N$ e $\sigma^*(t, x)$ uniformemente ellittica). Proprietà di martingala del portafoglio scontato associato a strategie autofinanzianti e ammissibili. Strategie replicanti e prezzo di "non arbitraggio" per un'opzione replicabile in presenza di una misura di martingala equivalente. Indipendenza del prezzo dalla misura di martingala equivalente. Definizione di mercato completo ed unicità della misura di martingala equivalente in un mercato completo. Teorema classico di completezza del mercato.

[cfr. Appunti, Paragrafi 2.2, 2.3, 2.4]

Lezioni 31, 32, 33 - 10/11/2014

Breve discussione sui mercati non completi. Equazione alle derivate parziali associata al prezzo di un'opzione europea quando esiste la funzione-prezzo ed è noto essere regolare; la strategia di copertura come il gradiente della funzione-prezzo. Le Greche di un'opzione. La regolarità della funzione-prezzo di un'opzione europea di payoff: legame con EDP paraboliche. Operatori differenziali lineari del secondo ordine uniformemente ellittici e diffusione sottostante.

[cfr. Appunti, Par 2.4, 2.5; Baldi, Cap. 9]

Lezioni 34, 35 - 12/11/2014

La regolarità della funzione-prezzo come conseguenza del teorema di esistenza ed unicità (forte) di una EDP parabolica con termine del secondo ordine uniformemente ellittico (cambio di

variabile). Edp paraboliche in un dominio limitato (problema di Cauchy-Dirichlet): formula di rappresentazione per la soluzione. Il problema di Cauchy su \mathbb{R}^m .

[cfr. Baldi, Cap. 9]

Lezioni 36, 37, 38 - 17/11/2014

La formula di Feynman-Kac. Cenni sulla soluzione fondamentale del problema di Cauchy. Ancora sul legame tra EDP paraboliche e prezzo/copertura di opzioni. Metodi Monte Carlo: generalità.

[cfr. Baldi, Cap. 9; Appunti sui metodi Monte Carlo, Par. 1]

Lezioni 39, 40, 41 - 19/11/2014

Metodi Monte Carlo per il calcolo numerico del prezzo di opzioni. Simulazione del moto browniano geometrico (il generatore di Box-Muller). Calcolo numerico con tecniche Monte Carlo nel modello di Black e Scholes del prezzo di opzioni call/put standard e asiatiche. Confronto con le formule esatte e uso delle formule di parità.

[cfr. Appunti sui metodi Monte Carlo, Par. 2, 3]

Lezioni 42, 43, 44 - 24/11/2014

Valutazione numerica del prezzo di opzioni su due sottostanti (call e digital) e relative formule di "parità". Opzioni-barriera (call/put, in/out): approssimazione del tempo di raggiungimento della barriera con il "metodo standard" (primo istante di uscita della traiettoria discretizzata) e con il "metodo con correzione" (approssimazione dell'istante di uscita con la probabilità di uscita nell'intervallo infinitesimale). La formula di parità. Breve discussione sul calcolo del prezzo quando il processo sottostante è una diffusione qualsiasi (metodo di Eulero) e non necessariamente il processo di Black-Scholes.

[cfr. Appunti sui metodi Monte Carlo, Par. 3.]

Lezioni 45, 46, 47 - 26/11/2014

Calcolo numerico via Monte Carlo della copertura: il metodo delle differenze finite e il metodo basato sulla rappresentazione della delta sotto forma di aspettazione. Copertura dinamica.

[cfr. Appunti, Par. 3]

Lezioni 48 - 01/12/2014

Breve panoramica sui tre possibili approfondimenti: opzioni americane, calcolo di Malliavin, tassi di interesse.

PARTE II: APPROFONDIMENTI

Le ulteriori ore a disposizione del corso seguono un corso di letture su un argomento a scelta ad esempio tra:

- **OPZIONI AMERICANE** [cfr. Appunti di D. Lamberton, link al sito del corso]
- **INTRODUZIONE AL CALCOLO DI MALLIAVIN E APPLICAZIONI IN FINANZA** [cfr. Appunti]
- **MODELLI DI DIFFUSIONE PER I TASSI D'INTERESSE** [cfr. Lamberton e Lapeyre, Cap. 6 ed esercizi del Cap. 6]

Gli appunti si possono richiedere inviando un messaggio a caramell@mat.uniroma2.it

Potranno essere presi in considerazione ulteriori argomenti di approfondimento proposti dagli studenti.