Diario delle lezioni e del tutorato di

Probabilità e Statistica

a.a. 2013/2014

`www.mat.uniroma2.it/~caramell/did_1314/ps.htm`

04/03/2014 - Lezioni 1, 2
Breve introduzione al corso. Fenomeni deterministici ed aleatori. Spazi campionari, σ-algebre (o insiemi degli eventi), misure di probabilità. Lo spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Spazi di probabilità uniformi. Esempi ed esercizi.

[cfr. Baldi, Par. 1.1, 1.2, 1.3]

05/03/2014 - Lezioni 3, 4, 5
Proprietà generali della probabilità. Monotonia della probabilità. La probabilità condizionata (anche come "nuova" misura di probabilità). Conseguenze: la formula delle probabilità totali e la formula di Bayes. Esempi ed esercizi.

[cfr. Baldi, Par. 1.4, 1.5]

07/03/2014 - Lezioni 6, 7, 8
Indipendenza tra eventi. Le prove ripetute e lo schema (successo-insuccesso) di Bernoulli. Richiami di calcolo combinatorio (permutazioni, disposizioni, combinazioni). Esempi ed esercizi. Urne composte da due classi diverse di elementi ed estrazioni: lo schema con rimpiazzo (di Bernoulli) e senza rimpiazzo (legge ipergeometrica).

[cfr. Baldi, Par. 1.5, 1.6]

11/03/2014 - Tutorato 1

[cfr. pagina web del corso]

12/03/2014 - Lezioni 9, 10, 11
Definizione di variabili aleatorie e discussione sulle richieste della definizione. Variabili aleatorie discrete. Legge, distribuzione e densità discreta. Legge bernoulliana, binomiale, ipergeometrica, geometrica e geometrica modificata. Esempi ed esercizi.

[cfr. Baldi, Par. 2.1, 2.2]

14/03/2014 - Lezioni 12, 13
Proprietà di mancanza di memoria delle leggi geometriche. Assegnata una densità discreta, costruzione di uno spazio di probabilità su cui è definita una v.a. con densità discreta uguale a quella data. La legge di Poisson, anche come legge limite di leggi binomiali. Esempi ed esercizi.

[cfr. Baldi, Par. 2.2]

18/03/2014 - Tutorato 2
[cfr. pagina web del corso]

19/03/2014 - Lezioni 14, 15, 16
Funzioni di ripartizione: le tre proprietà caratteristiche. Funzioni di ripartizione di v.a. discrete. V.a. discrete m-dimensionali: densità congiunta. Calcolo delle marginali dalla densità congiunta. Esempi. Definizione di indipendenza tra v.a. Caso v.a. discrete: l'indipendenza di $X_1, \ldots, X_m$ equivale alla fattorizzazione della densità discreta congiunta $p_{X_1,\ldots,X_m}(x_1, \ldots, x_m)$ nel prodotto delle densità marginali $p_{X_1}(x_1), \ldots, p_{X_m}(x_m)$.

[cfr. Baldi, Par. 2.2, 2.3, 2.4]

21/03/2014 - Lezioni 17, 18, 19
Esercizi su v.a. indipendenti e leggi congiunte. La legge condizionale di X dato che $Y = y$. Proprietà ed uso, in particolare calcolo della densità congiunta di X e Y nota la densità condizionale di X dato Y e la marginale di Y. Esempi ed esercizi.

[cfr. Baldi, Par. 2.4]

25/03/2014 - Tutorato 3
[cfr. pagina web del corso]

26/03/2014 - Lezioni 20, 21, 22
Funzioni di v.a. discrete: studio della legge. Indipendenza di $\phi(X)$ e $\psi(Y)$ quando X e Y sono discrete e indipendenti. Indipendenza di v.a. quando la densità congiunta si fattorizza nel prodotto di due funzioni dipendenti ciascuna dalle singole variabili. Calcoli con le densità. La densità della somma di v.a. discrete quando è nota la densità congiunta. Caso particolare quando le v.a. sono indipendenti (prodotto di convoluzione). Esempi: somma di binomiali indipendenti con lo stesso parametro p; somma di Poisson indipendenti; somma di geometriche indipendenti. La legge del max e del min di due v.a. Esempi ed esercizi.

[cfr. Baldi, Par. 2.4, 2.5]

28/03/2014 - Lezioni 23, 24, 25
Definizione di speranza matematica. Esistenza e calcolo della speranza matematica per funzioni di variabili aleatorie. Le proprietà della speranza matematica (ad esempio, linearità e positività). Esistenza nel caso di v.a. limitate. Calcolo della speranza matematica per la funzione indicatrice (bernoulliana) e per la legge binomiale, ipergeometrica, uniforme su un insieme finito, geometrica (e geometrica modificata), di Poisson. L'idenità di Wald per somme aleatorie. Fattorizzazione nel caso di v.a. indipendenti. La media condizionale.

[cfr. Baldi, Par. 2.6]

01/04/2014 - Tutorato 4
[cfr. pagina web del corso]

02/04/2014 - Lezioni 26, 27, 28
Momenti e momenti centrati. La varianza. Interpretazione della media e della varianza: media come migliore costante che approssima una v.a. e varianza come indicatore della qualità dell'approssimazione. Disuguaglianza di Chebyshev. Proprietà della varianza (dilatazione e invarianza per traslazioni deterministiche). La covarianza. Relazione tra non correlazione ed indipendenza di due v.a. Varianza della somma di v.a. Calcolo della varianza per v.a. di legge bernoulliana e binomiale.

[cfr. Baldi, Par. 2.6]

04/04/2014 - Lezioni 29, 30, 31
Varianza della legge di Poisson, geometrica e geometrica modificata. Coefficiente di correlazione. Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz. Esempi. La retta di regressione: significato di "dipendenza positiva" e "dipendenza negativa" in termini di covarianza. La legge (debole) dei grandi numeri. Esempi di applicazione.

[cfr. Baldi, Par. 2.6, 2.8, 2.9]

08/04/2014 - Tutorato 5

[cfr. pagina web del corso]

09/04/2014 - Lezioni 32, 33, 34
Esercizi di preparazione per l'esonero. Richiami sulle proprietà delle funzioni di ripartizione. V.a. continue. V.a. assolutamente continue: definizione di densità e proprietà; esistenza della densità nota la funzione di ripartizione.

[cfr. Baldi, Par. 3.1]

11/04/2014 - Lezioni 35, 36, 37
Esempi di leggi assolutamente continue: legge uniforme, esponenziale, di Weibull. Calcolo di leggi: densità di una v.a. che è funzione di una v.a. assolutamente continua. Esempi: legge di X^2 e di $aX + b$ quando X ha densità. V.a. indipendenti. Calcolo della densità del max e del min di due v.a. indipendenti con densità. Vettori aleatori a.c. di $\mathbb{R}^2$: densità congiunta e proprietà; esistenza delle densità marginali e loro rappresentazione in termini di integrale; il viceversa nel caso di v.a. indipendenti.

[cfr. Baldi, Par. 3.2, 3.3]

12/04/2014 - I esonero

[testo e soluzioni alla pagina web del corso]

15/04/2014 - Lezioni 38, 39
Esempi ed esercizi sulla relazione di indipendenza tra due v.a. e la fattorizzazione della densità congiunta. La legge uniforme su un insieme di $\mathbb{R}^2$ di misura positiva e finita. Vettori aleatori su $\mathbb{R}^m$: la densità congiunta; le densità marginali e loro calcolo a partire dalla densità congiunta; indipendenza e proprietà di fattorizzazione della densità congiunta. Indipendenza di v.a. che sono funzioni di vettori aleatori indipendenti. Calcoli con densità congiunte. Densità della somma di due v.a. con densità congiunta. Esempi ed esercizi.

[cfr. Baldi, Par. 3.3]

16/04/2014 - Lezioni 40, 41, 42
Calcoli con densità congiunte: densità di una funzione "buona" di v.a. tramite il teorema del cambio di variabile. Esempio: legge di una trasformazione lineare-affine di un vettore aleatorio con densità. Esempi sull'uso del teorema del cambio di variabile per il calcolo di densità. Speranza matematica per v.a. con densità: definizione e proprietà. Momenti. Varianza e covarianza. Matrice di covarianza.

[cfr. Baldi, Par. 3.3, 3.4, 3.5]

23/04/2014 - Tutorato 6

[cfr. pagina web del corso]

29/04/2014 - Lezioni 43, 44
Leggi normali e leggi gamma: proprietà, esistenza dei momenti, calcolo della media e della varianza. Esempi ed esercizi.

[cfr. Baldi, Par. 3.6, 3.7]

30/04/2014 - Lezioni 45, 46, 47
Variabili aleatorie complesse. La funzione caratteristica. Calcolo esplicito per la legge binomiale, geometrica, di Poisson, esponenziale, uniforme. Le proprietà: la f.c. della somma di v.a. indipendenti; la f.c. di una trasformazione lineare-affine; il legame con i momenti (s.d.), con applicazione al calcolo della f.c. della legge gaussiana; se due v.a. hanno la stessa f.c. allora hanno la stessa legge (s.d.); la f.c. delle v.a. che sono coordinate del vettore aleatorio; caratterizzazione della f.c. di v.a. indipendenti. La legge normale multivariata: definizione in termini della funzione caratteristica.

[cfr. Baldi, Par. 3.13, 3.14]

06/05/2014 - Tutorato 7

[cfr. pagina web del corso]

07/05/2014 - Lezioni 48, 49, 50
La f.c. di un vettore gaussiano: interpretazione dei parametri (vettore delle medie e matrice di covarianza). Scrittura esplicita della densità di probabilità quando la matrice di covarianza è non degenere e cenni sul fatto che la densità esiste se e solo se la matrice di covarianza è non degenere. Proprietà dei vettori gaussiani: legge gaussiana delle componenti; equivalenza tra componenti indipendenti e covarianza nulla; legge normale di una trasformazione lineare affine. Esempi ed esercizi. La convergenza quasi certa e la convergenza in probabilità. Proprietà (se $X_n \xrightarrow{P} c$ allora per ogni f continua si ha $f(X_n) \xrightarrow{P} f(c)$; se $X_n \xrightarrow{P} X$ e $Y_n \xrightarrow{P} Y$ allora $X_n + Y_n \xrightarrow{P} X + Y$; se $X_n \xrightarrow{P} X$ e $c_n \to c$ allora $c_n X_n \xrightarrow{P} cX$). La legge dei grandi numeri riscritta in termini di convergenza in probabilità: i classici stimatori non distorti della media e della varianza. La convergenza in legge, anche come convergenza più debole della convergenza in probabilità (se $X_n \xrightarrow{P} X$ allora $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$).

[cfr. Baldi, Par. 3.14, 4.1 , 4.2]

09/05/2014 - Lezioni 51, 52, 53
Il teorema di convergenza di Lévy (senza dimostrazione). Esempi ed esercizi sulla convergenza in legge. Il teorema del limite centrale. Applicazione: l'approssimazione normale, in particolare della legge $\mathrm{Bi}(n, p)$ (con correzione di continuità) e $\Gamma(n, \lambda)$, per n grande.

[cfr. Baldi, Par. 4.2, 4.3, 4.4]

13/05/2014 - Tutorato 8

[cfr. pagina web del corso]

14/05/2014 - Lezioni 54, 55, 56
Problemi di stima: confronto tra la disuguaglianza di Chebyschev e l'approssimazione normale; intervalli di fiducia, anche approssimati (con uso dell'approssimazione normale e dello stimatore classico della varianza). Esempi ed esercizi. Cenni sull'uso della legge t di Student con n gradi di libertà per costruire intervalli di fiducia approssimati per la media. Processi aleatori e catene di Markov: definizione. Catene di Markov omogenee. La catena che esprime il "problema della rovina del giocatore". Funzione o matrice di transizione come matrice stocastica.

[cfr. Baldi, Par. 4.4, 4.5, 5.1]

16/05/2014 - Lezioni 57, 58, 59
La matrice di transizione in m passi. La distribuzione congiunta di una catena di Markov in k istanti prefissati. La relazione di comunicazione tra stati della catena. Classi chiuse e irriducibili; stati assorbenti. Stati transitori e ricorrenti. Caratterizzazione degli stati transitori (e quindi ricorrenti) per catena di Markov a stati finiti (senza dimostrazione). Decomposizione degli stati in unione disgiunta dell'insieme degli stati transitori e delle classi irriducibili (senza dimostrazione). Esempi, in particolare la catena associata al problema della rovina del giocatore. Le distribuzioni invarianti. Il teorema di Markov-Kakutani sull'esistenza di una distribuzione invariante per catene a stati finiti.

[cfr. Baldi, Par. 5.2, 5.3, 5.4]

20/05/2014 - Tutorato 9

[cfr. pagina web del corso]

21/05/2014 - Lezioni 60, 61, 62
Catene regolari e relazioni con le catene irriducibili. Il teorema di Markov (senza dimostrazione). Distribuzione invariante per matrici di transizione bistocastiche. Stazionarietà di una distribuzione reversibile. Il criterio di regolarità per catene finite, irriducibili e tali che almeno un elemento della diagonale della matrice di transizione sia positivo. Esempi: passeggiate a caso sui grafi. Il teorema di unicità della distribuzione invariante per catene finite ed irriducibili. Esempi. Distribuzione invariante per la catena di nascita e morte a stati finiti (nel caso di irriducibilità). Distribuzioni invarianti per la cetena che descrive il problema della rovina del giocatore.

[cfr. Baldi, Par. 5.2, 5.3, 5.4]

23/05/2014 - Lezioni 63, 64, 65
Probabilià di passaggio in una classe C. Il sistema che lega le probabilità di passaggio in C quando la catena parte da uno stato i che non è in C ma che comunica con C. Caso particolare: lo stato i è transitorio e C è la classe degli stati ricorrenti. Caso della rovina del giocatore: prova del fatto che il gioco prima o poi finisce. Calcolo esplicito della probabilità di raggiungimento dello 0 per la catena di nascita e morte. Esempio: la probabilià di rovina nel caso di gioco equo ($p = q$) e non ($p \neq q$).

[cfr. Baldi, Par. 5.4, 5.6]

27/05/2014 - Tutorato 10

[cfr. pagina web del corso]

28/05/2014 - Lezioni 66, 67, 68
Tempo medio di assorbimento nella classe degli stati ricorrenti quando la catena parte da uno stato transitorio: il sistema associato. Calcolo esplicito per la rovina del giocatore. Tempo medio di passaggio in uno stato k per una catena di Markov irriducibile: la catena di appoggio che ha k come stato assorbente ed il sistema associato. Esempi ed esercizi.

[cfr. Baldi, Par. 5.6]

30/05/2014 - Lezioni 69, 70, 71
Esempi ed esercizi sui tempi medi di assorbimento. Distribuzione invariante per la catena di nascita e morte a stati numerabili. Esercizi di preparazione all'esonero.

[cfr. Baldi, Par. 5.6]

03/06/2014 - Lezioni 72, 73
Esercizi di preparazione all'esonero.

04/06/2014 - II esonero
Testo e soluzioni alla pagina web del corso.