

Diario delle lezioni di
Metodi e Modelli dei Mercati Finanziari
a.a. 2013/2014

PARTE I: **OPZIONI EUROPEE E METODI MONTE CARLO**

Lezioni 1, 2 - 02/10/2013

Breve introduzione al corso. Richiami di calcolo stocastico: integrale di Ito, processi di Ito, formula di Ito. Il teorema di rappresentazione delle martingale browniane.

[cfr. Baldi, Cap. 6, 7; Lamberton e Lapeyre, Cap. 3]

Lezioni 3, 4, 5 - 04/10/2013

Conclusione della dimostrazione del teorema di rappresentazione delle martingale browniane. Ancora richiami di calcolo stocastico: la martingala esponenziale e il teorema di Girsanov; equazioni differenziali stocastiche (teorema classico di esistenza ed unicità, stime in L^p e markovianità della soluzione, il generatore infinitesimale e la formula di Ito).

I due problemi (prezzo/copertura) legati alle opzioni.

[cfr. Baldi, Cap. 7 e 8; Lamberton e Lapeyre, Cap. 3 e 4.]

Lezioni 6, 7, 8 - 09/10/2013

Il moto browniano geometrico. Il modello di Black e Scholes. Strategie autofinanzianti: caratterizzazione in termini della dinamica del portafoglio scontato. La misura “di rischio neutro”. Strategie ammissibili e replicanti. Portafoglio replicabile. Replicabilità delle opzioni di quadrato integrabile (sotto la misura di rischio neutro) e prezzo delle opzioni europee.

[cfr. Lamberton e Lapeyre, Cap. 4]

Lezioni 9, 10 - 11/10/2013

Equazione alle derivate parziali associata alla funzione-prezzo quando il payoff è funzione del sottostante a maturità e calcolo esplicito della copertura. Le Greche di un'opzione. La formula di parità per opzioni call/put. Le formule di Black e Scholes per il prezzo e la copertura di opzioni call e put.

[cfr. Lamberton e Lapeyre, Cap. 4]

Lezioni 11, 12, 13 - 16/10/2013

Il modello di Black e Scholes con coefficienti dipendenti dal tempo.

[cfr. Lamberton e Lapeyre, Problema 1 al Cap. 4]

Lezioni 14, 15, 16 - 23/10/2013

Il modello di Garman-Kohlhagen: prezzo e copertura di opzioni su valuta estera. Opzioni di scambio (su due sottostanti) nel modello di Black e Scholes in dimensione 2: generalità.

[cfr. Lamberton e Lapeyre, Problemi 2 e 3 al Cap. 4]

Lezioni 17, 18, 19 - 25/10/2013

Prezzo e copertura di opzioni di scambio. Opzioni asiatiche nel modello di Black e Scholes: prezzo e copertura.

[cfr. Lamberton e Lapeyre, Problemi 3 e 7 al Cap. 4]

Lezioni 20, 21, 22 - 30/10/2013

Opzione composta call su call nel modello di Black e Scholes. Modelli di diffusione per i mercati finanziari: ipotesi matematiche e di mercato. Prime proprietà.

[cfr. Lamberton e Lapeyre, Problema 5 al Cap. 4; Appunti, Par 1]

Lezioni 23, 24, 25 - 6/11/2013

Strategie autofinanzianti: caratterizzazione del differenziale di Ito del portafoglio scontato. Strategie ammissibili e di arbitraggio. Le misure equivalenti a quella di mercato. Definizione di misura di martingala equivalente. Caratterizzazione delle misure di martingala equivalenti e la condizione sufficiente “classica” ($d \geq N$ e $\sigma\sigma^*(t, x)$ uniformemente ellittica).

[cfr. Appunti, Par 2.1 e 2.2]

Lezioni 26, 27, 28 - 8/11/2013

Proprietà di martingala del portafoglio scontato associato a strategie autofinanzianti e ammissibili. Strategie replicanti e prezzo di “non arbitraggio” per un’opzione replicabile in presenza di una misura di martingala equivalente. Indipendenza del prezzo dalla misura di martingala equivalente. Definizione di mercato completo ed unicità della misura di martingala equivalente in un mercato completo. teorema classico di completezza del mercato.

[cfr. Appunti, Par 2.3, 2.4]

Lezioni 29, 30, 31 - 13/11/2013

Breve discussione sui mercati non completi. Equazione alle derivate parziali associata al prezzo di un’opzione europea quando esiste la funzione-prezzo ed è noto essere regolare e la strategia di copertura come il gradiente della funzione-prezzo. Le Greche di un’opzione. La regolarità della funzione-prezzo di un’opzione europea di payoff $\Phi(X_T)$ come conseguenza del teorema di esistenza ed unicità (forte) di una EDP parabolica con termine del secondo ordine uniformemente ellittico (cambio di variabile). Operatori differenziali lineari del secondo ordine uniformemente ellittici e diffusione sottostante. Integrabilità del tempo di uscita da un aperto limitato di una diffusione soddisfacente alle ipotesi (A').

[cfr. Appunti, Par 2.4, 2.5; Baldi, Cap. 9]

Lezioni 32, 33, 34 - 15/11/2013

Edp paraboliche in un dominio limitato (problema di Cauchy-Dirichlet): formula di rappresentazione per la soluzione. Il problema di Cauchy su \mathbb{R}^m e la formula di Feynman-Kac.

[cfr. Baldi, Cap. 9]

Lezioni 35, 36, 37 - 25/11/2013

Cenni sulla soluzione fondamentale del problema di Cauchy. Ancora sul legame tra EDP paraboliche e prezzo/copertura di opzioni. Metodi Monte Carlo: generalità. Uso per il calcolo numerico del prezzo di opzioni. Simulazione del moto browniano e del moto browniano geometrico.

[cfr. Baldi, Cap. 9; Appunti, Par. 1, 2]

Lezioni 38, 39, 40 - 27/11/2013

Calcolo numerico con tecniche Monte Carlo nel modello di Black e Scholes del prezzo di opzioni call/put standard e asiatiche. Uso delle formule di parità. Valutazione numerica del prezzo di opzioni su due sottostanti (call e digital) e relative formule di “parità”. Calcolo numerico via Monte Carlo della copertura: il metodo delle differenze finite e il metodo basato sulla rappresentazione della delta sotto forma di aspettazione.

[cfr. Appunti, Par. 3.1, 3.2]

Lezioni 41, 42, 43 - 4/12/2013

Calcolo esplicito dei pesi del metodo basato sulla rappresentazione della delta sotto forma di aspettazione nel modello di Black e Scholes. Cenni di calcolo di Malliavin: costruzione delle formule di integrazione per parti ed uso per il calcolo dei pesi nelle formule di rappresentazione delle greche sotto forma di aspettazione. Copertura dinamica.

[cfr. Appunti, Par. 3.2, 3.3]

PARTE II: APPROFONDIMENTI

Le ulteriori ore a disposizione del corso seguono un corso di letture su un argomento a scelta ad esempio tra:

- **OPZIONI AMERICANE** [cfr. Appunti di D. Lamberton, link al sito del corso]
- **INTRODUZIONE AL CALCOLO DI MALLIAVIN E APPLICAZIONI IN FINANZA** [cfr. Appunti]
- **MODELLI DI DIFFUSIONE PER I TASSI D'INTERESSE** [cfr. Lamberton e Lapeyre, Cap. 6 ed esercizi del Cap. 6]

Gli appunti si possono richiedere inviando un messaggio a caramell@mat.uniroma2.it

Potranno essere presi in considerazione ulteriori argomenti di approfondimento proposti dagli studenti.