Diario delle lezioni e del tutorato di

Probabilità e Statistica

a.a. 2012/2013

`www.mat.uniroma2.it/~caramell/did_1213/ps.htm`

05/03/2013 - Lezioni 1, 2, 3
Breve introduzione al corso. Fenomeni deterministici ed aleatori. Spazi campionari, σ-algebre (o insiemi degli eventi), misure di probabilità. Lo spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Spazi di probabilità uniformi. Proprietà generali. Esempi ed esercizi.

[cfr. Baldi, Par. 1.1, 1.2, 1.3, 1.4]

06/03/2013 - Lezioni 4, 5
Monotonia della probabilità. La probabilità condizionata (anche come "nuova" misura di probabilità). Conseguenze: la formula delle probabilità totali e la formula di Bayes. Esempi ed esercizi.

[cfr. Baldi, Par. 1.4, 1.5]

07/03/2013 - Lezioni 6, 7, 8
Indipendenza tra eventi. Le prove ripetute e lo schema (successo-insuccesso) di Bernoulli. Esempi ed esercizi.

[cfr. Baldi, Par. 1.5]

12/03/2013 - Tutorato 1

[cfr. pagina web del corso]

13/03/2013 - Lezioni 9, 10, 11
Richiami di calcolo combinatorio (combinazioni, disposizioni etc). Esempi ed esercizi. Urne composte da due classi diverse di elementi ed estrazioni: lo schema con rimpiazzo (di Bernoulli) e senza rimpiazzo (legge ipergeometrica). Definizione di variabili aleatorie e discussione sulle richieste della definizione.

[cfr. Baldi, Par. 1.6, 2.1]

14/03/2013 - Lezioni 12, 13, 14
Variabili aleatorie discrete. Legge, distribuzione e densità discreta. Legge bernoulliana, binomiale, ipergeometrica, geometrica e geometrica modificata. Proprietà di mancanza di memoria delle leggi geometriche. Assegnata una densità discreta, costruzione di uno spazio di probabilità su cui è definita una v.a. con densità discreta uguale a quella data. Esempi ed esercizi.

[cfr. Baldi, Par. 2.2]

19/03/2013 - Tutorato 2

[cfr. pagina web del corso]

20/03/2013 - Lezioni 15, 16, 17

Data una densità discreta p, costruzione di uno spazio di probabilità su cui è definita una v.a. discreta con densità p. La legge di Poisson. Funzioni di ripartizione: le tre proprietà caratteristiche. Funzioni di ripartizione di v.a. discrete. V.a. discrete m-dimensionali: densità congiunta. Calcolo delle marginali dalla densità congiunta. Esempi. La legge multinomiale.

[cfr. Baldi, Par. 2.2, 2.3, 2.4]

21/03/2013 - Lezioni 18, 19, 20

La legge condizionale di X dato che $Y = y$. Proprietà ed uso. Esempi ed esercizi. Definizione di indipendenza tra v.a. Caso v.a. discrete: l'indipendenza di $X_1, \ldots, X_m$ equivale alla fattorizzazione della densità discreta congiunta $p_{X_1,\ldots,X_m}(x_1, \ldots, x_m)$ nel prodotto delle densità marginali $p_{X_1}(x_1), \ldots, p_{X_m}(x_m)$.

[cfr. Baldi, Par. 2.4]

26/03/2013 - Tutorato 3

[cfr. pagina web del corso]

27/03/2013 - Lezioni 21, 22, 23

Indipendenza di due v.a. quando la densità congiunta si fattorizza nel prodotto di due funzioni dipendenti ciascuna dalle singole variabili. Funzioni di v.a. discrete: studio della legge. Indipendenza di $\phi(X)$ e $\psi(Y)$ quando X e Y sono discrete e indipendenti. Calcoli con le densità. La densità della somma di due v.a. discrete quando è nota la densità congiunta. Caso particolare quando le due v.a. sono indipendenti (prodotto di convoluzione). Esempi: somma di binomiali indipendenti con lo stesso parametro p; somma di Poisson indipendenti. La legge del max e del min di due v.a. Esempi ed esercizi. Definizione di speranza matematica. Esistenza e calcolo della speranza matematica per funzioni di variabili aleatorie.

[cfr. Baldi, Par. 2.4, 2.5, 2.6]

28/03/2013 - Lezioni 24, 25, 26

Le proprietà della speranza matematica (ad esempio, linearità e positività). Esistenza nel caso di v.a. limitate. Calcolo della speranza matematica per la funzione indicatrice (bernoulliana) e per la legge binomiale, ipergeometrica, geometrica (e geometrica modificata), di Poisson. L'idenità di Wald per somme aleatorie. Fattorizzazione nel caso di v.a. indipendenti. La media condizionale. Invarianza della media condizionale nel caso di v.a. indipendenti. Esempi ed esercizi.

[cfr. Baldi, Par. 2.6]

02/04/2013 - Tutorato 4

[cfr. pagina web del corso]

03/04/2013 - Lezioni 27, 28, 29
Momenti e momenti centrati. La varianza. Interpretazione della media e della varianza: media come migliore costante che approssima una v.a. e varianza come indicatore della qualità dell'approssimazione. Disuguaglianza di Chebyshev. Proprietà della varianza (dilatazione e invarianza per traslazioni deterministiche). La covarianza. Relazione tra non correlazione ed indipendenza di due v.a. Varianza della somma di v.a. Calcolo della varianza per v.a. di legge bernoulliana, binomiale, di Poisson, geometrica e geometrica modificata. Coefficiente di correlazione. Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz. Esempi.

[cfr. Baldi, Par. 2.6]

04/04/2013 - Lezioni 30, 31, 32
La retta di regressione: significato di "dipendenza positiva" e "dipendenza negativa" in termini di covarianza. La legge dei grandi numeri. Esempi di applicazioni. Richiami sulle proprietà delle funzioni di ripartizione. V.a. continue. V.a. assolutamente continue: definizione di densità e proprietà; esistenza della densità nota la funzione di ripartizione. Esempi: legge uniforme, esponenziale, di Weibull.

[cfr. Baldi, Par. 2.8, 2.9, 3.1]

09/04/2013 - Tutorato 5

[cfr. pagina web del corso]

10/04/2013 - Lezioni 33, 34, 35
I quantili di una legge. Calcolo di leggi: densità di una v.a. che è funzione di una v.a. assolutamente continua. Esempi: legge di X^2 e di $aX + b$ quando X ha densità. V.a. indipendenti. Calcolo della densità del max e del min di due v.a. con densità. Vettori aleatori a.c. di $\mathbb{R}^2$: densità congiunta e proprietà; esistenza delle densità marginali e loro rappresentazione in termini di integrale, quando esiste la densità congiunta; il viceversa nel caso di v.a. indipendenti.

[cfr. Baldi, Par. 3.1, 3.2, 3.3]

11/04/2013 - Lezioni 36, 37, 38
Esempi ed esercizi sulla relazione di indipendenza tra due v.a. e la fattorizzazione della densità congiunta. La legge uniforme su un insieme di $\mathbb{R}^2$ di misura positiva e finita. Vettori aleatori su $\mathbb{R}^m$: la densità congiunta; le densità marginali e loro calcolo a partire dalla densità congiunta; indipendenza e proprietà di fattorizzazione della densità congiunta. Indipendenza di v.a. che sono funzioni di vettori aleatori indipendenti. Esempi ed esercizi.

[cfr. Baldi, Par. 3.3]

16/04/2013 - Tutorato 6

[cfr. pagina web del corso]

17/04/2013 - Lezioni 39, 40, 41
Esempi ed esercizi di preparazione all'esonero. La densità condizionale di v.a. aventi densità congiunta, ed invarianza della densità condizionale quando le v.a. sono indipendenti. Calcoli con densità congiunte: densità della somma; densità di una funzione "buona" di v.a. tramite

il teorema del cambio di variabile. Esempio: legge di una trasformazione lineare-affine di un vettore aleatorio con densità.

[cfr. Baldi, Par. 3.3]

18/04/2013 - I esonero
Testo e soluzioni alla pagina web del corso.

24/04/2013 - Lezioni 42, 43
Esempi sull'uso del teorema del cambio di variabile per il calcolo di densità. Speranza matematica per v.a. con densità: definizione e proprietà. Momenti. Varianza e covarianza.

[cfr. Baldi, Par. 3.4, 3.5]

30/04/2013 - Lezioni 44, 45
Leggi normali, gamma, beta: proprietà, calcolo della media e della varianza. Esempi.

[cfr. Baldi, Par. 3.6, 3.7, 3.9]

02/05/2013 - Lezioni 46, 47, 48
Variabili aleatorie complesse. La funzione caratteristica. Calcolo esplicito per la legge binomiale, geometrica, di Poisson, esponenziale, uniforme. Le proprietà: la f.c. della somma di v.a. indipendenti; la f.c. di una trasformazione lineare-affine; il legame con i momenti (s.d.), con applicazione al calcolo della f.c. della legge gaussiana; se due v.a. hanno la stessa f.c. allora hanno la stessa legge (s.d.); la f.c. delle v.a. che sono coordinate del vettore aleatorio; caratterizzazione della f.c. di v.a. indipendenti. La legge normale multivariata: definizione in termini della funzione caratteristica; interpretazione dei parametri (vettore delle medie e matrice di covarianza); scrittura esplicita della densità di probabilità quando la matrice di covarianza è non degenere e cenni sul fatto che la densità esiste se e solo se la matrice di covarianza è non degenere.

[cfr. Baldi, Par. 3.13, 3.14]

07/05/2013 - Tutorato 7

[cfr. pagina web del corso]

08/05/2013 - Lezioni 49, 50, 51
Proprietà delle normali multivariate: legge gaussiana delle componenti; equivalenza tra componenti indipendenti e covarianza nulla; legge normale di una trsformazione lineare affine. La disuguaglianza di Chebycev e la legge dei grandi numeri per v.a. a.c. La convergenza in legge: definizione, esempi, il teorema di convergenza di Lévy (senza dimostrazione). Il teorema limite centrale. Applicazione: l'approssimazione normale.

[cfr. Baldi, Par. 4.1 (solo cenni), 4.2, 4.3, 4.4]

09/05/2013 - Lezioni 52, 53, 54
Approssimazione normale della legge $\Gamma(n, \lambda)$. La correzione di continuità nell'approssimazione normale della legge $\mathrm{Bi}(n, p)$. Problemi di stima: stima della media teorica tramite la media empirica. Intervalli di fiducia approssimati (con uso dell'approssimazione normale). Lo stimatore classico della varianza. Esempi ed esercizi.

[cfr. Baldi, Par. 4.4, 4.5]

14/05/2013 - Tutorato 8
[cfr. pagina web del corso]

15/05/2013 - Lezioni 55, 56, 57
Uso della legge t di Student con n gradi di libertà per costruire intervalli di fiducia approssimati per la media (cenni). Processi aleatori e catene di Markov: definizione. Catene di Markov omogenee. Esempi, in particolare della catena che risolve il "problema della rovina del giocatore". Funzione o matrice di transizione: proprietà, esempi. La matrice di transizione in m passi.

[cfr. Baldi, Par. 5.1, 5.2]

16/05/2013 - Lezioni 58, 59, 60
La distribuzione congiunta di una catena di Markov in k istanti prefissati. La relazione di comunicazione tra stati della catena. Classi chiuse e irriducibili; stati assorbenti. Stati transitori e ricorrenti. Caratterizzazione degli stati transitori (e quindi ricorrenti) per catena di Markov a stati finiti (senza dimostrazione). Decomposizione degli stati in unione disgiunta dell'insieme degli stati transitori e delle classi irriducibili (senza dimostrazione). Esempi, in particolare la catena associata al problema della rovina del giocatore e le catena di nascita e morte. Le distribuzioni invarianti. Il teorema di Markov-Kakutani sull'esistenza di una distribuzione invariante per catene a stati finiti.

[cfr. Baldi, Par. 5.2, 5.3, 5.4]

21/05/2013 - Tutorato 9
[cfr. pagina web del corso]

22/05/2013 - Lezioni 61, 62, 63
Catene regolari e relazioni con le catene irriducibili. Il teorema di Markov (oggi senza dimostrazione). Distribuzione invariante per matrici di transizione bistocastiche. Stazionarietà di una distribuzione reversibile. Il criterio di regolarità per catene finite, irriducibili e tali che almeno un elemento della diagonale della matrice di transizione sia positivo. Esempi: passeggiate a caso sui grafi. Unicità della distribuzione invariante per catene finite ed irriducibili. Esempi. Distribuzione invariante per la catena di nascita e morte a stati finiti (nel caso di irriducibilità).
[cfr. Baldi, Par. 5.2, 5.3, 5.4]

23/05/2013 - Lezioni 64, 65, 66
Distribuzione invariante per la catena di nascita e morte a stati numerabili. Distribuzione invariante per la catena che descrive il "problema della rovina del giocatore". Probabilià di passaggio in una classe C. Il sistema che lega le probabilità di passaggio in C quando la catena parte da uno stato i che non è in C ma che comunica con C. Calcolo esplicito per la catena di nascita e morte. Esempio: la probabilià di rovina nel caso di gioco equo ($p = q$) e non ($p \neq q$).

[cfr. Baldi, Par. 5.4, 5.6]

28/05/2013 - Tutorato 10

[cfr. pagina web del corso]

29/05/2013 - Lezioni 67, 68, 69

Tempi medi di passaggio: il sistema associato. Calcolo esplicito per la rovina del giocatore. Algoritmo di Metropolis: la matrice di transizione, regolarità e reversibilità della distribuzione di partenza.

[cfr. Baldi, Par. 5.6, 5.5]

30/05/2013 - Lezioni 70, 71, 72

Uso dell'algoritmo di Metropolis per il calcolo dei minimi. Periodo di una catena irriducibile. Aperiodicità ed equivalenza con la regolarità per catene a stati finiti. Esercizi ed esempi.

[cfr. Baldi, Par. 5.6, 5.8 (solo per quello che riguarda le catene a stati finiti)]

04/06/2013 - II esonero

Testo e soluzioni alla pagina web del corso.