

Diario delle lezioni di
Metodi e Modelli dei Mercati Finanziari
a.a. 2012/2013

PARTE I: **OPZIONI EUROPEE E METODI MONTE CARLO**

Lezioni 1, 2, 3 - 03/10/2012

Breve introduzione al corso e alla finanza matematica: il problema del prezzo e della copertura di opzioni. Richiami di calcolo stocastico: integrale di Ito, processi di Ito, formula di Ito.

[cfr. Baldi, Cap. 6, 7; Lamberton e Lapeyre, Cap. 3]

Lezioni 4, 5, 6 - 05/10/2012

La martingala esponenziale e il teorema di Girsanov.

[cfr. Baldi, Cap. 7; Lamberton e Lapeyre, Cap. 3]

Lezioni 7, 8, 9 - 09/10/2012

Il teorema di rappresentazione delle martingale Browniane.

[cfr. Baldi, Cap. 7; Lamberton e Lapeyre, Cap. 3]

Lezioni 10, 11, 12 - 11/10/2012

Caratterizzazione delle misure equivalenti su (Ω, \mathcal{F}_T) , dove \mathcal{F}_T è la σ -algebra generata da un moto browniano fino a T e completata con gli insiemi di misura nulla. La “controparte” del teorema di Girsanov. Richiami di calcolo stocastico: equazioni differenziali stocastiche (teorema di esistenza ed unicità, stime in L^p e markovianità della soluzione, il generatore e la formula di Ito).

[cfr. Appunti, par. 2.2; Baldi, Cap. 8; Lamberton e Lapeyre, Cap. 3]

Lezioni 13, 14, 15 - 16/10/2012

I due problemi (prezzo/copertura) legati alle opzioni. Il moto browniano geometrico. Il modello di Black e Scholes. Strategie autofinanzianti: caratterizzazione in termini della dinamica del portafoglio scontato. La misura “di rischio neutro”.

[cfr. Lamberton e Lapeyre, Cap. 4]

Lezioni 16, 17, 18 - 18/10/2012

Strategie ammissibili e replicanti. Portafoglio replicabile. Replicabilità delle opzioni di quadrato integrabile e prezzo delle opzioni europee. Equazione alle derivate parziali associata alla funzione-prezzo quando il payoff è funzione del sottostante a maturità e calcolo esplicito della

copertura. Le Greche di un'opzione. La formula di parità per opzioni call/put. Le formule di Black e Scholes per il prezzo e la copertura di opzioni call e put.

[cfr. Lamberton e Lapeyre, Cap. 4]

Lezioni 19, 20 - 23/10/2012

Il modello di Black e Scholes con coefficienti dipendenti dal tempo.

[cfr. Lamberton e Lapeyre, Problema 1 al Cap. 4]

Lezioni 21, 22 - 25/10/2012

Il modello di Garman-Kohlhagen: prezzo e copertura di opzioni su valuta estera.

[cfr. Lamberton e Lapeyre, Problema 2 al Cap. 4]

Lezioni 23, 24, 25 - 30/10/2012

Opzioni di scambio (su due sottostanti): prezzo e copertura.

[cfr. Lamberton e Lapeyre, Problema 3 al Cap. 4]

Lezioni 26, 27, 28 - 06/11/2012

Opzione asiatica. Opzione composta (call su call), parte I.

[cfr. Lamberton e Lapeyre, Problemi 7 e 5 al Cap. 4]

Lezioni 29, 30, 31 - 08/11/2012

Opzione composta (call su call), parte II. Modelli di diffusione per i mercati finanziari: introduzione, ipotesi e prime proprietà. Strategie autofinanzianti: caratterizzazione del differenziale di Ito del portafoglio scontato. Strategie ammissibili e di arbitraggio. Le misure equivalenti a quella di mercato. Definizione di misura di martingala equivalente.

[cfr. Lamberton e Lapeyre, Problema 5 al Cap. 4; Appunti, Par 1 e 2.1]

Lezioni 32, 33 - 13/11/2012

Caratterizzazione delle misure di martingala equivalenti e la condizione sufficiente "classica" ($d \geq N$ e $\sigma\sigma^*(t, x)$ uniformemente ellittica). Proprietà di martingala del portafoglio scontato associato a strategie autofinanzianti e ammissibili. Strategie replicanti e prezzo di "non arbitraggio" per un'opzione replicabile in presenza di una misura di martingala equivalente. Indipendenza del prezzo dalla misura di martingala equivalente. Definizione di mercato completo ed unicità della misura di martingala equivalente in un mercato completo.

[cfr. Appunti, Par 2.3, 2.4]

Lezioni 34, 35, 36 - 20/11/2012

Completezza del mercato. Breve discussione sui mercati non completi. Equazione alle derivate parziali associata al prezzo di un'opzione europea quando esiste la funzione-prezzo ed è noto essere regolare e la strategia di copertura come il gradiente della funzione-prezzo. Le Greche di un'opzione.

[cfr. Appunti, Par 2.4, 2.5]

Lezioni 37, 38, 39 - 22/11/2012

La regolarità della funzione-prezzo di un'opzione europea di payoff $\Phi(X_T)$ come conseguenza del teorema di esistenza ed unicità (forte) di una EDP parabolica con termine del secondo ordine uniformemente ellittico (cambio di variabile). Operatori differenziali lineari del secondo ordine uniformemente ellittici e diffusione sottostante. Integrabilità del tempo di uscita da un aperto limitato di una diffusione soddisfacente alle ipotesi (A').

[cfr. Baldi, Cap. 9]

Lezioni 40, 41, 42 - 27/11/2012

Edp paraboliche in un dominio limitato (problema di Cauchy-Dirichlet): formula di rappresentazione per la soluzione. Il problema di Cauchy su \mathbb{R}^m e la formula di Feynman-Kac.

[cfr. Baldi, Cap. 9]

Lezioni 43, 44 - 29/11/2012

Cenni sulla soluzione fondamentale del problema di Cauchy. Metodi Monte Carlo: generalità. Uso per il calcolo numerico del prezzo di opzioni. Simulazione del moto browniano e del moto browniano geometrico. Calcolo numerico con tecniche Monte Carlo nel modello di Black e Scholes del prezzo di opzioni call/put standard e asiatiche. Uso delle formule di parità.

[cfr. Baldi, Cap. 9; Appunti, Par. 1, 2, 3.1]

Lezioni 45, 46 - 04/12/2012

Valutazione numerica del prezzo di opzioni su due sottostanti (call e digital) e relative formule di "parità". Calcolo numerico via Monte Carlo della copertura: il metodo delle differenze finite e il metodo basato sulla rappresentazione della delta sotto forma di aspettazione.

[cfr. Appunti, Par. 2, 3.1, 3.2]

Lezioni 47, 48 - 06/11/2012

Copertura dinamica.

[cfr. Appunti, Par. 3.3]

PARTE II: APPROFONDIMENTI

Le ulteriori ore a disposizione del corso (per coloro che intendono o devono fare un esame di CFU > 6) seguono un corso di letture su un argomento a scelta ad esempio tra:

- **OPZIONI AMERICANE** [cfr. Appunti]
- **INTRODUZIONE AL CALCOLO DI MALLIAVIN E APPLICAZIONI IN FINANZA** [cfr. Appunti]
- **MODELLI DI DIFFUSIONE PER I TASSI D'INTERESSE** [cfr. Lamberton e Lapeyre, Cap. 6 ed esercizi del Cap. 6]

Gli appunti si possono richiedere inviando un messaggio a caramell@mat.uniroma2.it

Potranno essere presi in considerazione ulteriori argomenti di approfondimento proposti dagli studenti.