

CP - COMPLEMENTI DI PROBABILITÀ

PROGRAMMA ED INFORMAZIONI SUL CORSO DELL'A.A. 2011/2012

CORSO DI LAUREA MAGISTRALE IN MATEMATICA PURA ED APPLICATA

UNIVERSITÀ TOR VERGATA

DOCENTE: LUCIA CARAMELLINO¹

Informazioni sul corso

Prerequisiti

Per una buona preparazione all'esame, è opportuno conoscere i contenuti dei corsi Probabilità 1 e 2. Consigliato CAM/1-Complementi di Analisi Matematica 1.

Testi consigliati²

[W] D. Williams: *Probability with martingales*. Cambridge University Press, 1991.

[B1] P. Baldi: *Appunti del corso di Calcolo delle Probabilità*. Appunti, 2001.

[B2] P. Baldi: *Equazioni differenziali stocastiche e applicazioni. Seconda edizione*. Pitagora Editrice, 2000.

[E] Esercitazioni (I-XIII) distribuite durante il corso.

[Bi] P. Billingsley: *Probability and measure. 2nd edition*. Wiley series in Probability and Mathematical Statistics, 1986.

Modalità d'esame

- L'esame consiste in una prova scritta ed in una prova orale.
- Gli studenti possono avvalersi di due prove di esonero. Qualora il risultato non dovesse risultare sufficiente ("sufficiente" = voto parziale ≥ 15 e media aritmetica dei due voti ≥ 18) a causa di un esonero andato male, lo studente può recuperarlo solo in occasione della prima prova scritta della prima sessione d'esame, durante la quale può scegliere appunto se recuperare l'esonero oppure svolgere per intero la prova scritta (in quest'ultimo caso, evidentemente perdendo il voto dell'esonero andato bene).

¹Dipartimento di Matematica, Università di Roma-Tor Vergata, email: caramell@mat.uniroma2.it; web: www.mat.uniroma2.it/~caramell

²Alla pagina www.mat.uniroma2.it/~caramell/did.1011/cp.htm è possibile scaricare le Esercitazioni periodicamente distribuite (che fanno parte integrante del corso), le prove d'esame e altro materiale didattico.

- La prenotazione all'esame è obbligatoria³. Nella seconda e terza sessione d'esame (appelli di giugno/luglio e settembre) la chiusura delle prenotazioni è anticipata di una settimana rispetto alla data prevista dello scritto.

Programma

Eventi, spazi di probabilità

Algebre e σ -algebre; eventi; spazi misurabili. Misure e misure di probabilità. Spazi di probabilità. Primo lemma di Borel-Cantelli.

cfr. [W] Cap. 1, 2; [E] I, II

Variabili aleatorie

Richiami sulle funzioni misurabili e le loro proprietà. Variabili aleatorie reali: leggi, funzioni di ripartizione. Definizione di convergenza q.c. Teorema di rappresentazione di Skorohod per v.a. reali (senza dim.). V.a. misurabili rispetto alla σ -algebra generata da una v.a.⁴

cfr. [W] Cap. 3; [E] III

Indipendenza

Definizione di σ -algebre e di v.a. indipendenti. Due σ -algebre sono indipendenti se e solo se la fattorizzazione che dà luogo all'indipendenza avviene su π -system che le generano. Confronto tra la "vecchia" e la "nuova" definizione di v.a. indipendenti. Il secondo lemma di Borel-Cantelli. La σ -algebra coda: misurabilità del $\liminf$ e del $\limsup$. La legge 0-1 di Kolmogorov.

cfr. [W] Cap. 4; [E] IV

Integrale di Lebesgue

Richiami sull'integrale di Lebesgue su spazi astratti: proprietà dell'integrale (monotonia, linearità, additività etc.); lo spazio $\mathcal{L}^1(S, \Sigma, \mu)$; teoremi di convergenza: convergenza monotona, lemmi di Fatou, convergenza dominata. Misure assolutamente continue e equivalenti. Teorema di Radon-Nicodým (senza dimostrazione). L'asserzione *se $\nu \ll \mu$ allora $f \in \mathcal{L}^1(S, \Sigma, \nu)$ se e solo se $f \frac{d\nu}{d\mu} \in \mathcal{L}^1(S, \Sigma, \mu)$* . Gli spazi $\mathcal{L}^p(S, \Sigma, \nu)$ e $L^p(S, \Sigma, \nu)$.

cfr. [W] Cap. 5; [E] V

Aspettazione

Definizione di media. La media come integrale rispetto alla legge. I teoremi di convergenza riscritti in termini probabilistici. Cambi di misure di probabilità a.c. : $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}$ come integrale

³I dettagli sono all'indirizzo <http://delphi.uniroma2.it/>

⁴Date sue v.a. X e Y , X è $\sigma(Y)$ misurabile se e solo se $X = f(Y)$ per qualche funzione boreliana f .

rispetto a $\mathbb{P}$ quando $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$. Le disuguaglianze di Markov, Jensen, Cauchy-Schwarz. Gli spazi $\mathcal{L}^p$ e L^p . L'inclusione $\mathcal{L}^r \subset \mathcal{L}^p$ quando $r \geq p \geq 1$. Varianza e covarianza: definizione e proprietà. Indipendenza implica covarianza nulla ma non il viceversa. Le disuguaglianze di Hölder e Minkowski.

cfr. [W] Cap. 6; [E] V

Convergenza forte. Legge dei Grandi Numeri

La convergenza in probabilità. Relazioni con la convergenza q.c. e la convergenza in L^p : implicazioni e controesempi. La Legge Forte dei Grandi Numeri (nella versione per v.a. i.i.d. con momento secondo). Applicazione: teorema di Weierstrass sull'approssimazione uniforme di funzioni continue su un compatto tramite polinomi.

cfr. [W] Cap. A13 e 7; [E] VI

Indipendenza e spazi prodotto

Spazi prodotto: σ -algebra prodotto, misura prodotto. Teorema di Fubini. Leggi e funzioni di distribuzione congiunte. V.a. congiunte e assoluta continuità. Indipendenza e legge congiunta come misura prodotto delle leggi marginali. Esistenza di una successione di v.a. i.i.d. con leggi date (cenni).

cfr. [W] Cap. 8; [E] VII

Funzione caratteristica

La funzione caratteristica: definizione, proprietà. Il teorema di inversione di Lévy (senza dimostrazione). La relazione biunivoca tra leggi di probabilità e funzioni caratteristiche.

cfr. [E] Cap. 16; [B1] Teorema 2.20 pag. 34; [E] VIII

Convergenza debole

Convergenza debole. La convergenza q.c. e in probabilità implicano la convergenza debole di v.a. La formulazione pratica (convergenza delle funzioni di distribuzione nei punti di continuità della funzione-limite). Il teorema di rappresentazione di Skorohod, II (senza dim.). Il teorema di Helly-Bray. La *tightness* come condizione necessaria per la convergenza debole e condizione sufficiente perché la sottosuccessione data dal teorema di Helly-Bray converga debolmente. Il teorema di convergenza di Lévy. Il Teorema Limite Centrale. La formula di Stirling come conseguenza del TLC.

cfr. [W] Cap. 17 e 18; [E] VIII, IX, X

Aspettazione condizionale

La media condizionale: definizione e prime proprietà. Esempio: media condizionale ad una σ -algebra generata da una partizione di Ω . Media condizionale di una v.a. X data una v.a. Y . Esempio: caso (X, Y) discreta o assolutamente continua. La media condizionale a $\mathcal{G}$ di $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ come proiezione ortogonale di X su $L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$. Le proprietà della

media condizionale. La probabilità condizionale e le versioni “regolari” della probabilità condizionale. Leggi condizionali e versioni regolari. La media condizionale come la media fatta sotto la legge condizionale (senza dim.).

cfr. [B2] Cap. 3; [E] XI

Martingale a tempo discreto

Processi a tempo discreto. Filtrazioni e processi adattati. Definizione di martingala, supermartingala e submartingala. Esempio: passeggiate aleatorie. Definizioni equivalenti per le martingale. Proprietà. Tempi d’arresto: definizione e proprietà. Martingale arrestate. Esempi. Il teorema d’arresto di Doob. Il problema della rovina del giocatore: calcolo della probabilità di rovina con il teorema d’arresto di Doob. Definizione di *upcrossing* e lemma di Doob sugli *upcrossing* (senza dim.). Il teorema di convergenza q.c. per martingale limitate in L^1 . La disuguaglianza di Doob ed il teorema di convergenza q.c. e in L^p per martingale limitate in L^p , $p > 1$. Caso $p = 1$: martingale uniformemente integrabili e convergenza in L^1 .

cfr. [B2] Cap. 1, Par. 1 e 2; Cap 4, par. 1-5; [E] XII, XIII