Diario delle lezioni di

Complementi di Probabilità

a.a. 2011/2012

17/10/2011 - Lezioni 1, 2
Richiami su algebre e σ-algebre; spazi misurabili. Esercizi. Richiami su misure (teoremi di estensione, monotonia) e misure di probabilità. Spazi di probabilità.

[cfr. Williams, Cap. 1; Esercitazione I e II]

19/10/2011 - Lezioni 3, 4
Richiami sulle funzioni misurabili e le loro proprietà. Criteri di misurabilità. Variabili aleatorie: σ-algebra generata. Eventi trascurabili. $\liminf$ e $\limsup$ di eventi. Il primo lemma di Borel Cantelli. Esempio: la convergenza q.c.

[cfr. Williams, Cap. 2 e 3; Esercitazione II, III]

24/10/2011 - Lezioni 5, 6, 7
Esempi ed esercizi su misure, variabili aleatorie e σ-algebre generate. π-systems: due misure di probabilità che coincidono su un π-system coincidono sulla σ-algebra generata dal π-system.

[cfr. Williams, Cap. 3; Esercitazione III]

26/10/2011 - Lezioni 8, 9, 10
Legge di una v.a. Variabili aleatorie reali: funzioni di ripartizione e corrispondenza con le leggi. Il teorema delle classi monotone (senza dimostrazione). V.a. misurabili rispetto alla σ-algebra generata da una v.a. Indipendenza per σ-algebre, per v.a. e per eventi. Due σ-algebre sono indipendenti se e solo se la fattorizzazione che dà luogo all'indipendenza avviene su π-system che le generano. Confronto tra la "vecchia" e la "nuova" definizione di indipendenza.

[cfr. Williams, Cap. 3, A3 e 4; Esercitazione III]

02/11/2011 - Lezioni 11, 12, 13
Il secondo lemma di Borel Cantelli. Uso dei due lemmi di Borel Cantelli per lo studio del $\limsup$ e del $\liminf$ di una successione di v.a. indipendenti. Discussione sulle σ-algebre generate da un numero finito di v.a. e da una successione di v.a. La σ-algebra coda.

[cfr. Williams, Cap. 4; Esercitazione IV]

07/11/2011 - Lezioni 14, 15, 16
Misurabilità del lim inf e del lim sup rispetto alla σ-algebra coda. La legge 0-1 di Kolmogorov. Legame con i lemmi di Borel Cantelli, esempi. L'integrale di Lebesgue astratto: integrale sulla classe delle funzioni semplici non negative, proprietà; integrale sulla classe delle funzioni misurabili non negative. Il teorema di convergenza monotona e le sue conseguenze. Lo spazio $\mathscr{L}^1(S, \Sigma, \mu)$. Teoremi di convergenza: convergenza monotona, lemmi di Fatou, convergenza dominata. Misure assolutamente continue.

[cfr. Williams, Cap. 4 e Cap. 5; Esercitazione IV]

09/11/2011 - Lezioni 17, 18, 19
Teorema di Radon-Nicodym. L'asserzione *se* $\nu \ll \mu$ *allora* $f \in \mathscr{L}^1(S, \Sigma, \nu)$ *se e solo se* $f\frac{d\nu}{d\mu} \in \mathscr{L}^1(S, \Sigma, \mu)$. Esempi. Lo spazio $\mathscr{L}^p(S, \Sigma, \mu)$. Lo spazio $\mathscr{L}^1(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ e la definizione di media. La media come integrale rispetto alla legge e confronto con la "vecchia" definizione di media. Proprietà della media. I teoremi di convergenza riscritti in termini probabilistici.

[cfr. Williams, Cap. 5 e Cap. 6; Esercitazione V]

14/11/2011 - Lezioni 20, 21, 22
Esercizi su cambi di probabilità e spazi $\mathscr{L}^p$. Le disuguaglianze di Markov e Jensen. Lo spazio vettoriale $\mathscr{L}^p(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, $p \geq 1$, e il funzionale $\| \cdot \|_p$ su $\mathscr{L}^p(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$. La stima $\|X\|_p \leq \|X\|_r$ e l'inclusione $\mathscr{L}^r(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}) \subset \mathscr{L}^p(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ quando $r \geq p$. La disuguaglianza di Hölder.

[cfr. Williams, Cap. 6; Esercitazione V]

16/11/2011 - Lezioni 23, 24, 25
Disuguaglianza di Minkowski. Lo spazio $L^p(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ e la norma $\| \cdot \|_p$. $L^p(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ come spazio di Banach (senza dimostrazione della completezza). Caso $p = 2$: $L^2(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ come spazio di Hilbert. Il significato della varianza, della covarianza e del coefficiente di correlazione per v.a. di $L^2(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$. Esercizi su: cambi di misure, v.a. indipendenti (in particolare, integrabilità del prodotto e l'affermazione: indipendenza implica covarianza nulla ma non vale il viceversa), spazi L^p. La convergenza in probabilità. Relazioni con la convergenza q.c. e la convergenza in $\mathscr{L}^p$. Esempi e controesempi.

[cfr. Williams, Cap. 6 e A13; Esercitazioni V e VI]

21/11/2011 - Lezioni 26, 27, 28
Esercizi su convergenza in probabilità, q.c. e in L^p. La Legge Forte dei Grandi Numeri[1]. Il teorema di Weierstrass (approssimazione uniforme di funzioni continue su un compatto tramite polinomi) come raffinamento della LFGN. Esempi ed esercizi.

[cfr. Williams, Cap. A13 e Cap. 7; Esercitazione VI]

23/11/2011 - Lezioni 29, 30
Spazi prodotto e σ-algebra prodotto. Misurabilità di $s_i \mapsto f(s)$ rispetto a Σ_i quando $f \in m\Sigma$, con $\Sigma = \Sigma_1 \times \cdots \times \Sigma_n$. L'affermazione "$X_i : (\Omega, \mathscr{F}) \to (E_i, \mathscr{E}_i)$ misurabile per ogni $i = 1, \ldots, n$ se e solo se $X = (X_1, \ldots, X_n) : (\Omega, \mathscr{F}) \to (E_1 \times \cdots \times E_n, \mathscr{E}_1 \times \cdots \times \mathscr{E}_n)$ è misurabile".

[cfr. Williams, Cap. 8; Esercitazione VII]

[1] Nella versione per v.a. i.i.d. con momento secondo.

28/11/2011 - Lezioni 31, 32, 33
Esercizi riepilogativi.

30/11/2011 - I esonero

05/12/2011 - Lezioni 34, 35, 36
Misura prodotto. Teorema di Fubini. La rappresentazione $\mathbb{E}(X) = \int_0^\infty \mathbb{P}(X \geq x)dx$ per $X \geq 0$ q.c. Leggi e funzioni di distribuzione congiunte. V.a. congiunte e assoluta continuità. Indipendenza e legge congiunta come misura prodotto delle leggi marginali. Esercizi.

[cfr. Williams, Cap. 8; Esercitazione VII]

07/12/2011 - Lezioni 37, 38, 39
La funzione caratteristica di v.a. o di misure di probabilità su $(\mathbb{R}^d, \mathscr{B}(\mathbb{R}^d))$. Proprietà (in particolare, uniforme continuità e differenziabilità per v.a. di L^k, $k \geq 1$). La funzione caratteristica della somma di v.a. indipendenti. Il teorema di caratterizzazione tra leggi e funzioni caratteristiche. Caratterizzazione delle v.a. indipendenti in termini di fattorizzazione della funzione caratteristica. Le v.a. gaussiane multivariate.

[cfr. Williams, Cap. 16 e Baldi (appunti), Cap. 2; Esercitazione VIII]

12/12/2011 - Lezioni 40, 41, 42
Il teorema di inversione di Lévy e il teorema di inversione per le densità (entrambi senza dimostrazione). Esercizi sulle funzioni caratteristiche. La convergenza debole su Prob$(\mathbb{R}^d)$. Caratterizzazione tramite le funzioni continue a supporto compatto e condizione sufficiente su H, dove H è totale nelle funzioni continue e limitate o nelle funzioni continue a supporto compatto. Il teorema di continuità: equivalenza tra convergenza debole e convergenza puntuale delle funzioni caratteristiche.

[cfr. Baldi (appunti), Cap. 2; Esercitazione IX]

14/12/2011 - Lezioni 43, 44, 45
Convergenza in legge di v.a. La formulazione pratica in dimensione 1 (convergenza delle funzioni di distribuzione nei punti di continuità della funzione-limite). I teoremi di rappresentazione di Skorohod. La convergenza q.c., in probabilità e in L^p implicano la convergenza in legge. La nozione di *tightness*. La *tightness* come condizione necessaria per la convergenza debole. Esempi ed esercizi.

[cfr. Williams, Cap. 16-17 e Baldi (appunti), Cap. 2; Esercitazione IX]

19/12/2011 - Lezioni 46, 47, 48
Il teorema di Helly-Bray. La *tightness* come condizione sufficiente perché la sottosuccessione data dal teorema di Helly-Bray converga debolmente. Il Teorema Limite Centrale. Esercizi.

[cfr. Williams, Cap. 17-18 e Baldi (appunti), Cap. 2; Esercitazione X]

09/01/2012 - Lezioni 49, 50, 51
La media condizionale. Prime proprietà. Esempi: media condizionale ad una σ-algebra generata da una partizione al più numerabile di Ω; media condizionale di una v.a. X data una v.a. Y nel caso (X, Y) assolutamente continua. Proprietà della media condizionale (linearità, positività,

“della torre” etc.). Teoremi di convergenza per le medie condizionali; la disuguaglianza di Jensen; conseguenze (per $p \geq 1$, se $X \in L^p$ allora $\mathbb{E}(X \mid \mathscr{G}) \in L^p$; $\mathbb{E}(X \mid \mathscr{G})$ come la proiezione ortogonale di $X \in L^2(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ su $L^2(\Omega, \mathscr{G}, \mathbb{P})$).

[cfr. Baldi, Cap. 3, Par. 1 e 2; Esercitazione XI]

11/01/2012 - Lezioni 52, 53, 54

Calcolo di $\mathbb{E}(\psi(X, \cdot) \mid \mathscr{D})$ quando X è $\mathscr{D}$-misurabile e $\omega \mapsto \psi(x, \omega)$ è una v.a. $\mathscr{G}$-misurabile con $\mathscr{G}$ indipendente da $\mathscr{D}$, per ogni x fissato. La probabilità condizionale: proprietà. Cenni sulla versione regolare della probabilità condizionale e della legge condizionale. Introduzione ai processi: filtrazioni e processi adattati. Tempi d'arresto: definizione, proprietà, esempi. Martingale, supermartingale e submartingale a tempo discreto: definizioni equivalenti.

[cfr. Baldi, Cap. 3, Par. 2; Cap. 1, Par. 2; Cap. 4, Par. 1 e 2; Esercitazione XII]

13/01/2012 - Lezioni 55, 56, 57

Passeggiate aleatorie. Proprietà delle (sub, super-)martingale. Martingale arrestate. Il teorema d'arresto. Il problema della rovina del giocatore. Il teorema di convergenza q.c. per martingale limitate in L^1.

[cfr. Baldi, Cap. 4, Par. 1, 2 e 3; Esercitazione XII]

16/01/2012 - Lezioni 58, 59, 60

Definizione di *upcrossing* e stima della media degli *upcrossing* per supermartingale (senza dimostrazione). Il teorema di convergenza q.c. per supermartingale con parte negativa limitata in L^1 ed il teorema di convergenza q.c. per martingale limitate in L^1. Esempi. La disuguaglianza di Doob ed il teorema di convergenza in L^p, per $p > 1$, per martingale limitate in L^p. Esempi.

[cfr. Baldi, Cap. 4, Par. 3 e 4; Esercitazione XIII]

18/01/2012 - Lezioni 61, 62

Esercizi su martingale e convergenza di martingale. Uniforme integrabilità: esempi e controesempi. Caratterizzazione tra convergenza in L^1 e uniforme integrabilità per successioni di v.a. che convergono q.c. Caratterizzazione di una famiglia $\mathscr{H}$ uniformemente integrabile in termini della limitatezza in L^1 di $\mathscr{H}_g = \{g(|Y|)\,;\, Y \in \mathscr{H}\}$ per $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ con $g \geq 0$, non decrescente, convessa e t.c. $\lim_{t\to\infty} \frac{g(t)}{t} = +\infty$ (senza dimostrazione). Uniforme integrabilità della famiglia $\mathscr{H} = \{\mathbb{E}(Y \mid \mathscr{G})\,;\, \mathscr{G}$ sotto σ-algebra di $\mathscr{F}\}$, $Y \in L^1$.

[cfr. Baldi, Cap. 4, Par. 5; Esercitazione XIII]

20/01/2012 - Lezioni 63, 64

Il teorema di convergenza in L^1 per martingale. Esercizi.

[cfr. Baldi, Cap. 4, Par. 5; Esercitazione XIII]

30/01/2012 - Lezioni 65, 66, 67

Esercizi riepilogativi.

31/01/2012 - II esonero