

Diario delle lezioni di  
**Metodi e Modelli  
dei Mercati Finanziari**  
a.a. 2010/2011

PARTE I: **OPZIONI EUROPEE E METODI MONTE CARLO**

**18/10 - lezioni 1, 2, 3**

Richiami di calcolo stocastico: integrale di Ito, processi di Ito, formula di Ito, teorema di rappresentazione delle martingale Browniane.

[cfr. Baldi, Cap. 6, 7; Lamberton e Lapeyre, Cap. 3]

**20/10 - lezioni 4, 5, 6**

Richiami di calcolo stocastico: teorema di Girsanov, equazioni differenziali stocastiche (teorema di esistenza ed unicità, stime in  $L^p$  e markovianità della soluzione, il generatore e la formula di Ito).

[cfr. Baldi, Cap. 7 e 8; Lamberton e Lapeyre, Cap. 3]

**25/10 - lezioni 7, 8, 9**

I due problemi legati alle opzioni. Il moto browniano geometrico. Il modello di Black e Scholes. Strategie autofinanzianti. La misura “di rischio neutro”. Strategie ammissibili e replicanti. Portafoglio replicabile.

[cfr. Lamberton e Lapeyre, Cap. 4]

**27/10 - lezioni 10, 11, 12**

Replicabilità delle opzioni di quadrato integrabile e prezzo delle opzioni europee. Equazione alle derivate parziali associata alla funzione-prezzo quando il payoff è funzione del sottostante a maturità e calcolo esplicito della copertura. Le formule di Black e Scholes per il prezzo e la copertura di opzioni call e put.

[cfr. Lamberton e Lapeyre, Cap. 4]

**03/11 - lezioni 13, 14, 15**

Il modello di Garman-Kohlhagen: prezzo e copertura di opzioni su valuta estera.

[cfr. Lamberton e Lapeyre, Problema 2 al Cap. 4]

**08/11 - lezioni 16, 17, 18**

Opzioni di scambio (su due sottostanti): prezzo e copertura.

[cfr. Lamberton e Lapeyre, Problema 3 al Cap. 4]

**10/11 - lezioni 19, 20, 21**

Opzione composta call su call: prezzo e copertura.

[cfr. Lamberton e Lapeyre, Problema 5 al Cap. 4]

**15/11 - lezioni 22, 23, 24**

Opzioni asiatiche.

[cfr. Lamberton e Lapeyre, Problema 7 al Cap. 4]

**22/11 - lezioni 25, 26, 27**

Modelli di diffusione per i mercati finanziari. Strategie autofinanzianti: caratterizzazione del differenziale di Ito del portafoglio scontato. Strategie ammissibili e di arbitraggio. Caratterizzazione delle misure equivalenti a quella del mercato.

[cfr. Appunti, Par 1, 2.1, 2.2]

**24/11 - lezioni 28, 29, 30**

Misure di martingala equivalenti: arbitraggio, proprietà di martingala del portafoglio scontato associato a strategie autofinanzianti e ammissibili. Strategie replicanti e prezzo di “non arbitraggio” per un’opzione replicabile in presenza di una misura di martingala equivalente. Indipendenza del prezzo dalla misura di martingala equivalente.

[cfr. Appunti, Par 2.2, 2.3, 2.4]

**29/11 - lezioni 31, 32, 33**

Mercati completi. Equazione alle derivate parziali associata al prezzo di un’opzione europea; la strategia di copertura. Le Greche di un’opzione.

[cfr. Appunti, Par 2.4, 2.5]

**01/12 - lezioni 34, 35, 36**

Operatori uniformemente ellittici e diffusione sottostante. Integrabilità del tempo di uscita da un aperto limitato. Edp paraboliche in un dominio limitato (problema di Cauchy-Dirichlet): formula di rappresentazione per la soluzione.

[cfr. Baldi, Cap. 9]

**06/12 - lezioni 37, 38, 39**

Il problema di Cauchy su  $\mathbb{R}^m$  e la formula di Feynman-Kac. Cenni sulle soluzioni fondamentali. Legame con la funzione-prezzo di un’opzione europea di payoff  $\Phi(X_T)$  ed il problema della copertura dell’opzione.

[cfr. Baldi, Cap. 9]

**15/12 - lezioni 40, 41, 42**

Metodi Monte Carlo: generalità. Simulazione del moto browniano e del moto browniano geometrico. Calcolo numerico con tecniche Monte Carlo nel modello di Black e Scholes del prezzo di opzioni: call/put standard, asiatiche, su due sottostanti (call e digital). Formule di “parità”. Calcolo numerico via Monte Carlo della copertura: il metodo delle differenze finite.

[cfr. Appunti, Par. 1, 2, 3.1]

## 21/12 - lezioni 43, 44, 45

Rappresentazione della delta sotto forma di aspettazione e uso per il calcolo della copertura.  
Copertura dinamica.

[cfr. Appunti, Par. 3.2, 3.3]

## PARTE II: **APPROFONDIMENTI**

Le ulteriori ore a disposizione del corso (per coloro che intendono o devono fare un esame di 8 CFU) seguono un corso di letture su un argomento a scelta tra

- **OPZIONI AMERICANE** [cfr. Appunti]
- **INTRODUZIONE AL CALCOLO DI MALLIAVIN E APPLICAZIONI IN FINANZA** [cfr. Appunti]
- **MODELLI DI DIFFUSIONE PER I TASSI D'INTERESSE** [cfr. Lamberton e Lapeyre, Cap. 6 ed esercizi del Cap. 6]

**NB:** gli appunti si possono richiedere inviando un messaggio all'indirizzo  
`caramell@mat.uniroma2.it`