Diario delle lezioni di

Complementi di Probabilità

a.a. 2010/2011

26/10 - lezioni 1, 2, 3

Richiami su algebre e σ-algebre; spazi misurabili. Esercizi. Richiami su misure (teoremi di estensione, monotonia) e misure di probabilità. Spazi di probabilità. $\liminf$ e $\limsup$ di eventi.

[cfr. Williams, Cap. 1; Esercitazione I e II]

28/10 - lezioni 4, 5, 6

Proprietà vere q.c. Esempio: la convergenza q.c. Il primo lemma di Borel Cantelli. Richiami sulle funzioni misurabili e le loro proprietà. Variabili aleatorie: σ-algebra generata, leggi. Variabili aleatorie reali: funzioni di ripartizione e corrispondenza con le leggi. Teorema di rappresentazione di Skorohod (enunciato e discussione).

[cfr. Williams, Cap. 2 e 3; Esercitazione II, III]

02/11 - lezioni 7, 8, 9

Dimostrazione del teorema di rappresentazione di Skorohod. Il teorema delle classi monotone (senza dimostrazione). V.a. misurabili rispetto alla σ-algebra generata da una v.a. Esercizi su v.a. e leggi.

[cfr. Williams, Cap. 3 e Cap. A3; Esercitazione III]

04/11 - lezioni 10, 11, 12

Indipendenza per σ-algebre, per v.a. e per eventi. Due σ-algebre sono indipendenti se e solo se la fattorizzazione che dà luogo all'indipendenza avviene su π-system che le generano. Confronto tra la "vecchia" e la "nuova" definizione di indipendenza. Il secondo lemma di Borel Cantelli. Uso dei due lemmi di Borel Cantelli per lo studio del $\limsup$ e del $\liminf$ di una successione di v.a. indipendenti. Discussione sulle σ-algebre generate da un numero finito di v.a.

[cfr. Williams, Cap. 4; Esercitazione IV]

09/11 - lezioni 13, 14, 15

σ-algebra generata da una successione di v.a. La σ-algebra coda: misurabilità del $\liminf$ e del $\limsup$. La legge 0-1 di Kolmogorov. Legame con i lemmi di Borel Cantelli, esempi. L'integrale di Lebesgue astratto: integrale sulla classe delle funzioni semplici non negative, proprietà; integrale sulla classe delle funzioni misurabili non negative. Il teorema di convergenza monotona e le sue conseguenze.

[cfr. Williams, Cap. 4 e Cap. 5; Esercitazione IV]

11/11 - lezioni 16, 17, 18
Lo spazio $\mathscr{L}^1(S, \Sigma, \mu)$. Teoremi di convergenza: convergenza monotona, lemmi di Fatou, convergenza dominata. Misure assolutamente continue ed teorema di Radon-Nicodym. L'asserzione *se* $\nu \ll \mu$ *allora* $f \in \mathscr{L}^1(S, \Sigma, \nu)$ *se e solo se* $f \frac{d\nu}{d\mu} \in \mathscr{L}^1(S, \Sigma, \mu)$. Esempi. Lo spazio $\mathscr{L}^1(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ e la definizione di media. La media come integrale rispetto alla legge e confronto con la "vecchia" definizione di media.

[cfr. Williams, Cap. 5 e Cap. 6; Esercitazione V]

16/11 - lezioni 19, 20, 21
Proprietà della media. I teoremi di convergenza riscritti in termini probabilistici. Le disuguaglianze di Markov e Jensen. Lo spazio vettoriale $\mathscr{L}^p(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, $p \geq 1$, e il funzionale $\|\cdot\|_p$ su $\mathscr{L}^p(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$. La stima $\|X\|_p \leq \|X\|_r$ e l'inclusione $\mathscr{L}^r(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}) \subset \mathscr{L}^p(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ quando $r \geq p$. Le disuguaglianze di Hölder e di Minkowski. Lo spazio $L^p(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ e la norma $\|\cdot\|_p$. $L^p(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ come spazio di Banach (senza dimostrazione della completezza). Caso $p = 2$: $L^2(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ come spazio di Hilbert. Il significato della varianza, della covarianza e del coefficiente di correlazione per v.a. di $L^2(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$.

[cfr. Williams, Cap. 6; Esercitazione V]

18/11 - lezioni 22, 23, 24
Lezione di soli esercizi su: cambi di misure, v.a. indipendenti (in particolare, integrabilità del prodotto e l'affermazione: indipendenza implica covarianza nulla ma non vale il viceversa), spazi L^p.

23/11 - lezioni 25, 26, 27
La convergenza in probabilità. Relazioni con la convergenza q.c. e la convergenza in $\mathscr{L}^p$. Esempi e controesempi. La Legge Forte dei Grandi Numeri[1]. Il teorema di Weierstrass (approssimazione uniforme di funzioni continue su un compatto tramite polinomi) come raffinamento della LFGN.

[cfr. Williams, Cap. A13 e Cap. 7; Esercitazione VI]

25/11 - lezioni 28, 29, 30
Spazi prodotto: σ-algebra prodotto, misura prodotto. Teorema di Fubini. La rappresentazione $\mathbb{E}(X) = \int_0^\infty \mathbb{P}(X \geq x)dx$ per $X \geq 0$ q.c. Leggi e funzioni di distribuzione congiunte. V.a. congiunte e assoluta continuità.

[cfr. Williams, Cap. 8; Esercitazione VII]

02/12 - lezioni 31, 32, 33
Indipendenza e legge congiunta come misura prodotto delle leggi marginali. Esercizi. La funzione caratteristica di v.a. o di misure di probabilità su $(\mathbb{R}^d, \mathscr{B}(\mathbb{R}^d))$. Proprietà (in particolare, continuità e differenziabilità). La funzione caratteristica della somma di v.a. indipendenti. Esempi (in particolare, la legge gaussiana).

[cfr. Williams, Cap. 16 e Baldi (appunti), Cap. 2; Esercitazione VIII]

[1]Nella versione per v.a. i.i.d. con momento secondo.

07/12 - lezioni 34, 35, 36
Il teorema di caratterizzazione tra leggi e funzioni caratteristiche. Il teorema di inversione di Lévy[2] e il teorema di inversione per le densità[3]. Caratterizzazione delle v.a. indipendenti tramite fattorizzazione delle funzioni caratteristiche. Le v.a. gaussiane. Convergenza debole. La convergenza q.c., in probabilità e in L^p implicano la convergenza debole di v.a. La formulazione pratica (convergenza delle funzioni di distribuzione nei punti di continuità della funzione-limite). Il teorema di rappresentazione di Skorohod, II.

[cfr. Williams, Cap. 16-17 e Baldi (appunti), Cap. 2; Esercitazione VIII]

09/12 - 37, 38, 39
Il teorema di continuità: la covergenza debole equivale alla convergenza delle funzioni caratteristiche. Il teorema di Helly-Bray. La *tightness* come condizione necessaria per la convergenza debole e condizione sufficiente perché la sottosuccessione data dal teorema di Helly-Bray converga debolmente. Il teorema di convergenza di Lévy. Il Teorema Limite Centrale.

[cfr. Williams, Cap. 17-18 e Baldi (appunti), Cap. 2; Esercitazioni IX e X]

14/12 - lezioni 40, 41, 42
Esercizi sulla convergenza debole.

16/12 - lezioni 43, 44
Esercizi di preparazione all'esonero.

21/12 -I esonero

11/01 - 45, 46, 47
La media condizionale. Prime proprietà. Esempi: media condizionale ad una σ-algebra generata da una partizione al più numerabile di Ω; media condizionale di una v.a. X data una v.a. Y nel caso (X, Y) assolutamente continua. Proprietà della media condizionale (linearità, positività, "della torre" etc.). Teoremi di convergenza per le medie condizionali; la disuguaglianza di Jensen; conseguenze (per $p \geq 1$, se $X \in L^p$ allora $\mathbb{E}(X \,|\, \mathscr{G}) \in L^p$; $\mathbb{E}(X \,|\, \mathscr{G})$ come la proiezione ortogonale di $X \in L^2(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ su $L^2(\Omega, \mathscr{G}, \mathbb{P})$).

[cfr. Baldi, Cap. 3, Par. 1 e 2; Esercitazione XI]

12/01 - lezioni 48, 49, 50
Calcolo di $\mathbb{E}(\psi(X, \cdot) \,|\, \mathscr{G})$ quando X è $\mathscr{G}$-misurabile e $\omega \mapsto \psi(x, \omega)$ è una v.a. $\mathscr{D}$-misurabile con $\mathscr{D}$ indipendente da $\mathscr{G}$, per ogni x fissato. La probabilità condizionale: proprietà. Cenni sulla versione regolare della probabilità condizionale. Introduzione ai processi: filtrazioni e processi adattati. Tempi d'arresto: definizione, proprietà, esempi.

[cfr. Baldi, Cap. 3, Par. 2 e Cap. 1, Par. 2; Esercitazione XII]

13/01 - lezioni 51, 52, 53
Martingale, supermartingale e submartingale a tempo discreto: definizioni equivalenti. Passeggiate aleatorie. Martingale arrestate. Il teorema d'arresto di Doob. Il problema della rovina del giocatore.

[cfr. Baldi, Cap. 1 Par. 2 e Cap. 4 Par. 1 e 2; Esercitazione XII]

---

[2]Senza dimostrazione.
[3]Senza dimostrazione.

18/01 - lezioni 54, 55, 56
Esercizi su martingale. Definizione di *upcrossing* e lemma[4] sugli *upcrossing*. Il teorema di convergenza q.c. per supermartingale con parte negativa limitata in L^1 Convergenza q.c. per martingale limitate in L^1. La disuguaglianza di Doob. Conseguenza: il teorema di convergenza in L^p, per $p > 1$, per martingale limitate in L^p.

[cfr. Baldi, Cap. 4, Par. 3 e 4; Esercitazione XIII]

19/01 - lezioni 57, 58, 59
Convergenza in L^1 di martingale: uniforme integrabilità.

[cfr. Baldi, Cap. 4, Par. 5; Esercitazione XIII]

20/01 - lezioni 60, 61, 62
Esercizi sulla convergenza di martingale.

24/01 - lezioni 63, 64
Esercizi di preparazione all'esonero.

27/01 - II esonero

[4]Senza dimostrazione.